Programm

des vollberechtigten

städtischen Realprogymnasiums

(Realgymnasium ohne Prima)

zu

Gumbinnen,

durch welches zu der

auf Montag, den 26. März, und Dienstag, den 27. März d. J., angesetzten öffentlichen Prüfung der Schüler im Namen des Lehrer-Kollegiums

ergebenst einladet

A. Jacobi,
Rektor.

Inhalt: 1) Beiträge für den mathematischen Unterricht. Anwendung der Determinanten in der Schule. Teil II. Vom ordentl. Lehrer Adalbert Powel.
2) Schulnachrichten vom Rektor.

Gumbinnen.
Gedruckt bei Wilh. Krauseneck.
1888.

1888. Programm Nr. 24.

Das hiesige Realprogymnasium ist unterm 4. Januar 1883 vom Herrn Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten als vollberechtigt anerkannt, so dafs es seit der Zeit wie jedes Gymnasium oder Realgymnasium seinen Schülern mit der Versetzung nach der Obersekunda oder nach einjährigem erfolgreichen Besuche der Sekunda das Zeugnis über die wissenschaftliche Befähigung für den einjährig-freiwilligen Militärdienst auszustellen berechtigt ist. Das Reifezeugnis, welches durch die Abgangsprüfung an unserer Anstalt erworben wird, berechtigt zu dem Eintritte in die Prima eines Realgymnasiums.

Der Unterricht im neuen Schuljahre beginnt Donnerstag, den 12. April.

Zur Aufnahme neuer Schüler wird der Unterzeichnete Dienstag, den 10 April, von 9 Uhr vormittags an, und Mittwoch, den 11. April, von 3 Uhr nachmittags an, bereit sein.

Vorzulegen sind der Tauf- bezw. Geburtsschein, der Impf- bezw. Wiederimpfungsschein, und, falls der Aufzunehmende schon eine andere öffentliche Schule besucht hat, das Abgangszeugnis.

Das Schulgeld beträgt monatlich für Sekunda, Tertia, Quarta je 6 Mark, für Quinta, Sexta je 5 Mark, für die Vorschule je 4 Mark. Einschreibegebühren und solche für Abgangszeugnisse werden nicht erhoben.

A. Jacobi, Rektor.

Die Determinanten und ihre Anwendung in der Schule.

Einleitung.

Die Wichtigkeit der Determinanten für alle Gebiete der Mathematik hat schon vielfach dazu Veranlassung gegeben, wenigstens die ersten Elemente der Determinantentheorie in einer für Schüler geeigneten Form auszuarbeiten und vorzutragen. Die passendste Gelegenheit dazu bietet wohl die Durchnahme der verschiedenen Methoden zur Auflösung eines Systems linearer Gleichungen. Da dieses schon in Tertia geschieht, und die Sätze über Permutationen und Kombinationen bis dahin den Schülern noch unbekannt sind, habe ich in dieser Arbeit versucht, die einfachsten Sätze über Determinanten ohne streng kombinatorische Grundlage, nur auf Grund der Eigenschaft der Determinante, dafs sie die Summe der Produkte der Elemente einer Zeile mit den dazu gehörigen Unterdeterminanten ist, wobei die Wahl des Vorzeichens der Unterdeterminanten in geeigneter Weise vorgenommen werden mufs, abzuleiten und einige Anwendungen zu geben.

Hat man 2 Gleichungen 1. Grades mit 2 Unbekannten:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f \quad \text{so ist:}$$

$$x = \frac{ce - fb}{ae - db} \qquad y = \frac{af - dc}{ae - db}$$

Hat man 3 Gleichungen 1. Grades mit 3 Unbekannten:

$$ax + by + cz = d$$
$$ex + fy + gz = h$$
$$ix + ky + lz = m \quad \text{so ist:}$$

$$x = \frac{d\,(fl - kg) - h\,(bl - kc) + m\,(bg - fc)}{a\,(fl - kg) - e\,(bl - kc) + i\,(bg - fc)}$$

$$y = \frac{a\,(hl - mg) - e\,(dl - mc) + i\,(dg - hc)}{a\,(fl - kg) - e\,(bl - kc) + i\,(bg - fc)}$$

$$z = \frac{a\,(fm - kh) - e\,(bm - kd) + i\,(bh - fd)}{a\,(fl - kg) - e\,(bl - kc) + i\,(bg - fc)}$$

Wendet man diese für die allgemeinen Coefficienten a b c · · · · nach einer der bekannten Methoden gefundenen Resultate auf Zahlenbeispiele an:

$$3x + 4y = 10$$
$$5x + 2y = 12 \quad \text{so wird:}$$

$$x = \frac{10 \cdot 2 - 12 \cdot 4}{3 \cdot 2 - 5 \cdot 4} = 2. \qquad y = \frac{3 \cdot 12 - 5 \cdot 10}{3 \cdot 2 - 5 \cdot 4} = 1.$$

$$3x + 5y + 4z = 80$$
$$5x + 6y - 3z = 30$$
$$2x + 3y + 7z = 90 \quad \text{so wird:}$$

$$x = \frac{80\left(6.7 - 3.(-3)\right) - 30\,(5.7 - 3.4) + 90\left(5.(-3) - 6.4\right)}{3\left(6.7 - 3\,(-3)\right) - 5\,(5.7 - 3.4) + 2\left(5.(-3) - 6.4\right)} = \frac{-120}{-40} = 3.$$

$$y = \frac{3\left(30.7 - 90.(-3)\right) - 5\,(80.7 - 90.4) + 2\left(80.(-3) - 30.4\right)}{-40} = 7.$$

$$z = \frac{3\,(6.90 - 3.30) - 5\,(5.90 - 3.80) + 2\,(5.30 - 6.80)}{-40} = 9.$$

Diese Anwendung der allgemeinen Resultate auf Zahlenbeispiele ist die Befolgung einer nur mechanischen Regel, welche in den allgemeinen Resultaten enthalten ist.

Es fragt sich nun, ob man diese Regel als ein so allgemeingültiges Gesetz aussprechen kann, daſs man im Stande ist, nur auf Grund dieses Gesetzes die n Unbekannten aus einem System von n Gleichungen 1. Grades auszurechnen. Es ergeben sich aus den allgemeinen Resultaten folgende Beobachtungen:

Die Werte für die Unbekannten, die zu einem System von Gleichungen gehören, sind Brüche mit demselben Nenner.

Ist ein System von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten gegeben, so sind sowohl Zähler als Nenner der Unbekannten Aggregate von Produkten zu je 2 Faktoren.

Wählt man für den Nenner ae — db das Symbol:

$$ae - db = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

so erhält man für die Zähler von x und y

$$ce - fb = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$

$$af - dc = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Das System der beiden Gleichungen:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

hat demnach die Lösungen:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

Ist ein System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, so sind sowohl Zähler als Nenner der Unbekannten Aggregate von Produkten zu je 3 Faktoren. Die eine Hälfte der Produkte ist positiv, die andere Hälfte negativ.

Der gemeinsame Nenner der Unbekannten

$$a\,(fl - kg) - e\,(bl - kc) + i\,(bg - fc)$$

läſst sich folgendermaſsen schreiben:

$$a \begin{vmatrix} f & g \\ k & l \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c \\ k & l \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix}.$$

Wählt man für diesen Ausdruck das Symbol

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix}$$

so wird, wie das Auge lehrt,

$$\text{der Zähler von } x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ m & k & l \end{vmatrix}$$

$$\text{- - - } y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & m & l \end{vmatrix}$$

$$\text{- - - } z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & k & m \end{vmatrix}$$

Das System der 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ex + fy + gz &= h \\ ix + ky + lz &= m \end{aligned}$$

hat also die Lösungen:

$$x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ m & k & l \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix} \qquad y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & m & l \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix} \qquad z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & k & m \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix}$$

Die vorhin eingeführten Symbole heifsen Determinanten, und zwar ist:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \text{ eine Determinante 2. Grades}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix} \text{ eine Determinante 3. Grades.}$$

Eine Determinante 2. Grades ist von $4 = 2^2$ Gröfsen abhängig, die man Elemente der Determinante nennt.

Entsprechend ist eine Determinante 3. Grades von $9 = 3^2$ Elementen abhängig.

Nach den bisherigen Beobachtungen ist anzunehmen, dafs die Werte der n Unbekannten, welche zu einem System von n Gleichungen 1. Grades gehören, Brüche sein werden, deren Zähler und Nenner aus Determinanten n. Grades bestehen. Bevor wir jedoch darauf näher eingehen, wollen wir das Wesen und die hauptsächlichsten Eigenschaften der Determinanten untersuchen.

Eine Bemerkung möge noch voran geschickt werden. Zu einer Determinante n. Grades gehören n^2 Elemente. Ist die Determinante von hohem Grade, so genügen die Buchstaben des Alphabets nicht mehr zur Bezeichnung der Elemente. Man wählt infolge dessen zur Unterscheidung der n^2 Elemente n Buchstaben, von denen jeder einen der Indices (Zeiger) 1 . . . bis n hat, z. B. $a_1, a_2 \ldots a_n, b_1 \ldots b_n \ldots$ oder besser einen einzigen Buchstaben mit doppelten Indices: $a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}, a_{21} \ldots a_{2n} \ldots a_{nn}$, so dafs z. B. a_{12} ein von a_{21} verschiedenes Element ist.

Symbol, Definition und Entwickelung der Determinante.

Symbol.

Das Schema $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ist ein von Cauchy eingeführtes Symbol für einen bestimmten algebraischen Ausdruck, welcher nach Gaufs Determinante genannt wird. Die Vertikalreihen des quadratförmigen Symbols heifsen Kolonnen, die Horizontalreihen heifsen Zeilen. $a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \ldots a_{nn}$ ist die Diagonalreihe. Die mit doppelten Indices versehenen Gröfsen $a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}\ a_{21} \ldots a_{2n} \ldots a_{nn}$ sind die n^2 verschiedenen Elemente der Determinante n. Grades.

Die doppelten Indices zeigen nicht nur an, dafs die einzelnen Elemente von einander dem Werte nach verschieden sind, sondern lassen zugleich die Stelle erkennen, an welcher das

Element steht. Z. B. a_{34} ist dasjenige Element, welches in der 3. Zeile und in der 4. Kolonne steht.

Denkt man sich die zu einem Elemente gehörige Zeile und Kolonne fort, so bleibt eine Determinante (n — 1). Grades stehen, welche die zu diesem Elemente gehörige Unterdeterminante heiſst. Unterdrückt man die zu einem Elemente dieser Unterdeterminante gehörige Zeile und Kolonne, so bleibt eine Determinante (n — 2). Grades u. s. w.

Z. B. ist die zu dem Elemente a_{23} der Determinante 4. Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ gehörige Unterdeterminante 3. Grades } = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Die zu dem Elemente a_{41} gehörige Unterdeterminante 2. Grades $= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$.

Verfolgt man dieses Verfahren noch weiter, so erhält man als zu dem Elemente a_{12} gehörige Unterdeterminante 1. Grades das Element a_{34}.

Definition.

Die Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ist ein Aggregat sämtlicher Produkte zu je n Faktoren, welche aus den gegebenen n^2 Elementen so gebildet sind, daſs in jedem Produkte aus jeder Zeile und aus jeder Kolonne ein Element als Faktor vorkommt. In keinem Produkte dürfen demnach 2 Faktoren aus derselben Zeile oder derselben Kolonne vorkommen, da sonst nicht alle Zeilen und Kolonnen in einem Produkte von n Faktoren vertreten sein können.

Die eine Hälfte der Produkte ist positiv, die andere negativ; die nähere Bestimmung der Vorzeichen bleibt noch vorbehalten.

Denkt man sich die Determinante entwickelt und nimmt sämtliche Glieder heraus, welche den gemeinsamen Faktor a_{ik} haben, so erhält man als Faktor von a_{ik} die zu a_{ik} gehörige Unterdeterminante; denn in keinem der dazu gehörigen Glieder darf als Faktor ein Element aus der i. Zeile und der k. Kolonne vorkommen.

Diese Unterdeterminante des Elementes a_{ik} wollen wir ohne Rücksicht auf das Vorzeichen α_{ik} nennen.

In der Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$ ist die zu dem Elemente a_{ik} gehörige Unterdeterminante

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots\dots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{(i-1)} & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)} & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} \dots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} \quad . & a_{n(k-i)} & a_{n(k+1)} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ordnen wir die ganze Determinante nach den Elementen einer Zeile oder Kolonne, was wir thun können, da ja in jedem Gliede der Determinante aus der gewählten Zeile oder Kolonne ein Element als Faktor vorkommen muſs, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Eine Determinante ist ein Aggregat der Produkte aus den Elementen einer beliebigen Zeile oder Kolonne mit den zugehörigen Unterdeterminanten.

Es ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{i1}\,\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\,\alpha_{in} \quad \text{oder} \\ &= a_{1k}\,\alpha_{1k} + a_{2k}\,\alpha_{2k} + \dots + a_{nk}\,\alpha_{nk} \end{aligned}$$

wo die α die zu den a gehörigen positiven oder negativen Unterdeterminanten sind. Wir haben jetzt ein Mittel, um sämtliche Glieder einer Determinante zu bilden, wenn wir berücksichtigen, daſs sich die Gröſsen α ebenso wie die ursprüngliche Determinante nach den Elementen einer ihrer Zeilen oder Kolonne ordnen lassen, und daſs man in der Zerlegung so fortfahren kann,

bis man auf Determinanten 1. Grades, d. h. auf ein Element selbst kommt. Es fehlt zur vollständigen Wertbestimmung der Determinante nur noch die Bestimmung des Vorzeichens der einzelnen Glieder.

Für die Bestimmung der Vorzeichen wollen wir folgendes festsetzen:

$\alpha_{11}\ \alpha_{31}\ \alpha_{51} \ldots$ sollen die positiven Unterdeterminanten von $a_{11}\ a_{31}\ a_{51} \ldots$ sein.
$\alpha_{21}\ \alpha_{41}\ \alpha_{61} \ldots$ - - negativen - - $a_{21}\ a_{41}\ a_{61} \ldots$ -

Da die Gröfsen α als Determinanten ihrerseits wieder nach demselben Princip entwickelt werden können, so genügt diese Bestimmung um eine Determinante nach den Elementen der ersten Kolonne vollständig zu entwickeln.

Entwickelung der Determinanten nach den Elementen der ersten Kolonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}) - a_{21}\,(a_{12}\, a_{33} - a_{32}\, a_{13}) + a_{31}\,(a_{12}\, a_{23} - a_{22}\, a_{13})$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} \left(a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \right) \\
&- a_{21} \left(a_{12} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \right) \\
&+ a_{31} \left(a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \right) \\
&- a_{41} \left(a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} - a_{11}\, a_{22}\, a_{43}\, a_{34} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23}\, a_{44} + a_{11}\, a_{32}\, a_{43}\, a_{24} \\
&+ a_{11}\, a_{42}\, a_{23}\, a_{34} - a_{11}\, a_{42}\, a_{33}\, a_{24} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33}\, a_{44} + a_{21}\, a_{12}\, a_{43}\, a_{34} \\
&+ a_{21}\, a_{32}\, a_{13}\, a_{44} - a_{21}\, a_{32}\, a_{43}\, a_{14} - a_{21}\, a_{42}\, a_{13}\, a_{34} + a_{21}\, a_{42}\, a_{33}\, a_{14} \\
&+ a_{31}\, a_{12}\, a_{23}\, a_{44} - a_{31}\, a_{12}\, a_{44}\, a_{24} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13}\, a_{44} + a_{31}\, a_{22}\, a_{43}\, a_{14} \\
&+ a_{31}\, a_{42}\, a_{13}\, a_{24} - a_{31}\, a_{42}\, a_{23}\, a_{14} - a_{41}\, a_{12}\, a_{23}\, a_{34} + a_{41}\, a_{12}\, a_{33}\, a_{24} \\
&+ a_{41}\, a_{22}\, a_{13}\, a_{34} - a_{41}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{14} - a_{41}\, a_{32}\, a_{13}\, a_{24} + a_{41}\, a_{32}\, a_{23}\, a_{14}.
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \,.\,.\, a_{1n} \\ a_{n1} \,.\,.\, a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \,.\,.\, a_{2n} \\ .\quad . \\ a_{2n} \quad a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \,.\,.\, a_{1n} \\ a_{32} \,.\,.\, a_{3n} \\ a_{n2} \,.\,.\, a_{nn} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} \,.\,.\, a_{1n} \\ a_{22} \,.\,.\, a_{2n} \\ a_{42} \,.\,.\, a_{4n} \\ .\ . \\ a_{n2} \,.\,.\, a_{nn} \end{vmatrix} - \ldots.$$

$$- (-1)^n\, a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{(n-1)\,2} & & a_{(n-1)\,n} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11} \left\{ a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} \,.\,.\, a_{3n} \\ a_{n3} \quad a_{nn} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{23} \,.\,.\, a_{2n} \\ a_{43} \,.\,.\, a_{4n} \\ a_{n3} \,.\,.\, a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^n\, a_{n2} \begin{vmatrix} a_{23} & .\,. & a_{2n} \\ a_{(n-1)\,3} & .\,. & a_{(n-1)\,n} \end{vmatrix} \right\}$$

$$- a_{21} \left\{ a_{12} \begin{vmatrix} a_{33} \,.\,.\, a_{3n} \\ a_{n3} \quad a_{nn} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{13} \,.\,.\, a_{1n} \\ a_{43} \,.\,.\, a_{4n} \\ a_{n3} \,.\,.\, a_{nn} \end{vmatrix} \ldots + (-1)^n\, a_{n2} \begin{vmatrix} a_{13} & .\,. & a_{1n} \\ a_{33} & .\,. & a_{3n} \\ a_{(n-1)\,3} & .\,. & a_{(n-1)\,n} \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ - - - - -$$

$$-(-1)^n a_{n1}\left\{a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ a_{(n-1)3} & \cdot\cdot & a_{(n-1)n}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{13} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{33} & & a_{3n} \\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & & \\ a_{(n-1)3} & & a_{(n-1)n}\end{vmatrix} \cdots\cdots + (-1)^n a_{(n-1)2}\begin{vmatrix} a_{13} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ a_{(n-2)3} & \cdot\cdot & a_{(n-1)n}\end{vmatrix}\right\}$$

Entwickelung einiger Determinanten, deren Elemente specielle Werte haben.

$$\begin{vmatrix} a & o \\ o & b \end{vmatrix} = ab;$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2.$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,ab.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1\,.\,8 - 2\,.\,3\,. = 2.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & a \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix} = a\,(bc - a^2) - b\,(b^2 - ac) + c\,(ab - c^2) = 3\,abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & o \\ o & a & b \\ b & o & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.\,(45 - 48) - 4\,(18 - 24) + 7\,(12 - 15) = 1\,(-3) - 4\,(-6) + 7\,(-3) = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 8\,(10 - 63) - 3\,(2 - 54) + 4\,(7 - 30) = -360.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(-1) - 1\,.\,1 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -5\,(25 - 24) - 4\,(-30 - 28) + 3\,(36 + 35) = 440.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & o \\ b & c & o & a \\ c & o & a & b \\ o & a & b & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & o & a \\ o & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & c & o \\ o & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c & o \\ c & o & a \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= a\,(ac^2 - b^2c - a^3) - b\,(2abc - b^3) + c\,(-ab^2 - c^3 + a^2c)$$
$$= -a^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c + b^4 - c^4.$$

$$-\begin{vmatrix} o & c & b & a \\ c & o & a & b \\ b & a & o & c \\ a & b & c & o \end{vmatrix} = -a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(-3 - 232 - 245) - 2\,(-2 + 180 + 190) + 3\,(-116 - 135 - 5) - 4\,(-98 - 114 + 4)$$
$$= -1152.$$

Entwickelung der Determinanten nach den Elementen einer beliebigen Kolonne oder Zeile.

Will man eine Determinante nach den Elementen einer andern Kolonne, oder nach den Elementen irgend einer Zeile entwickeln, so muſs man darauf achten, daſs die Glieder der Determinante dieselben Vorzeichen erhalten, wie bei der vorigen Entwickelung. Z. B. muſs die Unterdeterminante n — 2. Grades, welche zu den Elementen a_{21} a_{12} gehört, dasselbe Vorzeichen erhalten, gleichgültig, ob man die Entwickelung mit der 1ten oder 2ten Kolonne oder Zeile beginnt.

Zu diesem Zwecke muſs man den Unterdeterminanten der Elemente in ungerader Zeile der 2ten Kolonne dasselbe Vorzeichen geben, wie den Unterdeterminanten der Elemente in gerader Zeile der 1ten Kolonne und umgekehrt.

Da nach der Definition α_{11} α_{31} α_{51} . . die positiven, α_{21} α_{41} α_{61} . . die negativen Unterdeterminanten von a_{11} a_{31} a_{51} . . a_{21} a_{41} . . sind, so müssen nach dem vorhergehenden α_{12} α_{32} α_{52} die negativen, α_{22} α_{42} α_{62} . . die positiven Unterdeterminanten von a_{12} a_{32} a_{52} a_{22} a_{42} a_{62} sein. Ebenso werden α_{13} α_{33} α_{53} . . die positiven, α_{23} α_{43} α_{63} . . . die negativen Unterdeterminanten von a_{13} a_{33} a_{53} . . a_{23} a_{43} a_{63} . . . .

Allgemein wird α_{ik} die positive Unterdeterminante von a_{ik}, wenn a_{ik} in gerader Kolonne und gerader Zeile oder in ungerader Kolonne und ungerader Zeile steht, wenn also $i + k$ eine gerade Zahl ist.

α_{ik} ist die negative Unterdeterminante von a_{ik}, wenn a_{ik} in gerader Kolonne und ungerader Zeile oder in ungerader Kolonne und gerader Zeile steht, wenn also $i + k$ eine ungerade Zahl ist.

Die Unterdeterminante des Elementes a_{ik} ist also $= (-1)^{i+k}\,\alpha_{ik}$.

Man erhält für die Vorzeichen der Unterdeterminanten folgendes Schema:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & - & . - & (-1)^n \\ - & + & - & + & . & . & . . + & (-1)^n \\ + & - & . & - & - & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ - & (-1)^n & & & & & & +1 \end{vmatrix}$$

Einige Lehrsätze der Determinantentheorie.

1) Haben die Elemente einer Zeile oder Kolonne einen gemeinsamen Faktor, so kann man denselben vor die Determinante setzen; umgekehrt kann man eine Determinante dadurch mit einem Faktor multiplicieren, daſs man die Elemente einer Zeile oder Kolonne mit dem Faktor multipliciert.

Beweis. Haben die Elemente der iten Kolonne den gemeinsamen Faktor l, so daſs $a_{ki} = lb_{ki}$ ist, so wird, wenn wir die Det. nach den Elementen der iten Kolonne entwickeln:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots lb_{1i} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots lb_{2i} \dots a_{2n} \\ - \; - \; - \; - \; - \\ a_{n1} \dots lb_{ni} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = l\,b_{1i}\,\alpha_{1i} + l\,.\,b_{2i}\,\alpha_{2i} + \dots + lb_{ni}\,\alpha_{ni}$$

$$= l\,(b_{1i}\,\alpha_{1i}\,. + \dots + b_{ni}\,\alpha_{ni}) = l \begin{vmatrix} \alpha_{11} & b_{1i} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{n1} & b_{n1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Wenn die Elemente einer Zeile oder Kolonne alle bis auf eins verschwinden, so reduciert sich die Determinante auf das Produkt dieses Gliedes mit der zugehörigen Unterdeterminante.

Es ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ 0\,.\,0 & \dots a_{ik} & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ik}\,\alpha_{ik}.$$

Man sieht dieses sofort ein, wenn man die Determinante nach den Elementen der iten Zeile entwickelt.

Zusatz. Man kann demnach jede Determinante n. Grades als eine Determinante höhern Grades darstellen.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{n1} \quad a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & A_1 \dots A_n \\ 0 & a_{11} \quad a_{1n} \\ 0 & \dots\dots \\ 0 & a_{n1} \quad a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & B & B_1 \dots B_n \\ 0 & 1 & A_1 \dots A_n \\ 0 & 0 & a_{11} \dots a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{21} \dots a_{in} \\ . & . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 & a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Die Gröfsen $A_1 \dots A_n$, $B\ B_1 \dots B_n$ sind ganz willkürlich.

3) Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei parallele Zeilen oder Kolonnen mit einander vertauscht.

Beweis. Die zu den Elementen einer beliebigen Zeile oder Kolonne gehörigen Unterdeterminanten bleiben dieselben, auch wenn man die betreffende Zeile oder Kolonne mit einer Nachbarzeile oder Nachbarkolonne vertauscht. Da die Elemente aber aus einer geraden Zeile oder Kolonne in eine ungerade oder umgekehrt aus einer ungeraden Zeile oder Kolonne in eine gerade gelangt sein müssen, so haben die betreffenden Unterdeterminanten nach der Vertauschung andere Vorzeichen als vor der Vertauschung. Demnach ändert die ganze Determinante durch die Vertauschung zweier Nachbarzeilen oder zweier Nachbarkolonnen ihr Vorzeichen. Vertauscht man nun zwei beliebige Zeilen oder Kolonnen, z. B. die ite Kolonne mit der kten, so kann dieses in der Weise geschehen, dafs man durch wiederholte Vertauschung zweier Nachbarkolonnen zunächst die ite Kolonne zur kten Kolonne macht; dieses geschieht durch $k - i$ malige Vertauschung zweier Nachbarkolonnen. Die ursprünglich kte Kolonne, welche jetzt die $k - i$te K. ist, mufs nur noch durch fortgesetzte Vertauschung zweier Nachbarkolonnen zur iten gemacht werden. Dieses geschieht durch $(k - i - 1)$ malige Vertauschung. Im ganzen hat man also $2(k - i) - 1$, d. h. eine ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Nachbarkolonnen vorgenommen. Die Determinante hat demnach $2(k - i) - 1$ mal ihr Vorzeichen geändert, d. h. sie hat durch die Vertauschung der iten mit der kten Kolonne das dem ursprünglichen Vorzeichen entgegengesetzte erhalten.

4) Eine Determinante hat den Wert Null, wenn in zwei parallelen Zeilen oder Kolonnen die entsprechenden Elemente gleich oder proportional sind.

Beweis. Sind die entsprechenden Elemente zweier Zeilen oder Kolonnen proportional, so kann man dadurch, dafs man den betreffenden gemeinschaftlichen Faktor aus einer dieser beiden Zeilen oder Kolonnen vor die Determinante setzt, die beiden Zeilen oder Kolonnen gleichmachen. Vertauscht man nun die beiden gleichen Zeilen oder Kolonnen, so kann sich, weil die Elemente in beiden Reihen dieselben sind, an der Determinante nichts ändern; nach Satz (3) ändert sich aber das Vorzeichen. Wir haben also $D = -D$. Das kann aber nicht anders geschehen, als wenn $D = 0$ wird

5) Wenn man die Elemente einer Zeile oder Kolonne mit den zu den Elementen einer andern Zeile oder Kolonne gehörenden Unterdeterminanten multipliciert, so ist die Summe dieser Produkte gleich Null. Sind i und k von einander verschieden, so ist:

$$a_{1i}\,\alpha_{1k} + a_{2i}\,\alpha_{2k} + \dots + a_{ni}\,\alpha_{nk} = 0.$$

Beweis. Man kann die Summe dieser Produkte als Determinante schreiben, welche sich von der bisher immer gebrauchten Determinante dadurch unterscheidet, dafs die kte Kolonne fehlt, an ihrer Stelle aber die ite Kolonne zum zweiten Male vorkommt, so dafs eine Determinante mit 2 gleichen parallelen Kolonnen entsteht, welche nach (4) $= 0$ ist.

Es wird:

$$a_{1i}\,\alpha_{1k} + \dots + a_{ni}\,\alpha_{nk} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1(k-1)}\ a_{1i}\ a_{1(k+1)} \dots a_{1n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{n(k-1)}\ a_{ni}\ a_{n(k+1)} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

6) Wenn die Elemente einer Zeile oder Kolonne aus 2 oder mehr Gliedern bestehen, so zerfällt die Determinante in eben so viele Determinanten.

Es wird z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} + b_{1k} \dots a_{1n} \\ . - - - - - - - . \\ a_{n1} \dots a_{nk} + b_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{1k} + b_{1k})\,\alpha_{1k} + \dots (a_{nk} + b_{nk})\,\alpha_{nk}$$

$$= a_{1k}\,\alpha_{1k} + \dots + a_{nk}\,\alpha_{nk} + b_{1k}\,\alpha_{1k} + \dots + b_{nk}\,\alpha_{nk}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ - - - - - \\ a_{n1} \dots a_{nk} \quad a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \dots b_{1k} \dots a_{1n} \\ - - - - - - - \\ a_{n1} \dots b_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

7) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu allen Elementen einer Zeile oder Kolonne die mit einem gemeinschaftlichen Faktor multiplicierten Elemente einer andern Zeile oder Kolonne addiert.

Beweis. Addiert man zu den Elementen der iten Kolonne die mit l multiplicierten Elemente der kten Kolonne, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} + la_{1k} \dots + a_{1n} \\ - - - - - - - \\ a_{n1} \dots a_{ni} + la_{nk} \dots \quad a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1n} \\ - - \dots - \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ - - - - \\ a_{n1} \dots a_{nk} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die zweite Determinante hat zwei gleiche parallele Kolonnen, ist also nach (4) = 0.

Das Produkt zweier Determinanten und die adjungierte Determinante.

Sollen zwei Determinanten beliebigen Grades mit einander multipliciert werden, so können wir die Determinante niedern Grades (2. Zusatz) auf denselben Grad bringen, welchen die andere Determinante hat, so daſs zwei Determinanten desselben Grades zu multiplicieren sind.

Die gegebenen Determinanten seien:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{n1} \\ . \quad . \quad . \quad . \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix}$$

Zunächst vertauschen wir in der zweiten Determinante die Zeilen mit den Kolonnen, wodurch der Wert nicht geändert wird, so daſs das Produkt

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \quad a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11}\; b_{21} \dots b_{n1} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{1n}\; b_{2n} \dots b_{nn} \end{vmatrix} \text{ zu bilden ist.}$$

Wir können nun das Produkt dieser beiden Determinanten als Determinante des 2n. Grades schreiben, indem wir die Elemente der einen Determinante in die ersten n Zeilen der ersten n Kolonnen, die Elemente der andern Determinante in die letzten n Zeilen der letzten n Kolonnen des Schemas von $(2n)^2$ Elementen stellen, wenn wir die eine der freigebliebenen Ecken, zu denen auch je n^2 Elemente gehören, mit Nullen ausfüllen und den Elementen der letzten freigebliebenen Ecke beliebige Werte geben.

Indem wir statt dieser beliebigen Werte zum Zwecke der Umformung geeignete Werte wählen, schreiben wir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ b_{1n} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & & & & \\ a_{n1} & a_{2n} \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ 0 & 0 & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Daſs wir berechtigt sind, das Produkt in obiger Weise zu schreiben, geht aus Folgendem hervor. Jedes Glied der Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$ hat in der groſsen Determinante als Faktor

die Det. $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{n1} \\ b_{1n} & b_{nn} \end{vmatrix}$, so daſs also sämtliche Glieder des Produktes in der groſsen Determinante vorkommen müssen.

Daſs aber auch kein anderes Glied vorkommt, oder was dasselbe ist, daſs alle andern Glieder der groſsen Determinante verschwinden, läſst sich auf folgende Weise begründen. Alle nicht zum Produkte beider Determinanten gehörigen Glieder müssen aus jeder der beiden andern Ecken wenigstens ein Element als Faktor haben, denn der Faktor eines beliebigen Elements der rechten obern Ecke von n^2 Elementen kann nur $n-1$ Male eins der Elemente a und ebenso nur $n-1$ Male eins der Elemente b als Faktor haben; damit also das Glied ein Produkt von n Faktoren wird, muſs aus der linken untern Ecke von n^2 Elementen ein Element als Faktor hinzutreten. Alle diese Elemente haben aber den Wert Null. Die groſse Determinante von $(2n)^2$ Elementen läſst sich nun so umformen, daſs sie als Produkt zweier anderer Determinanten n. Grades geschrieben werden kann, von denen die eine den Wert ± 1 hat, so daſs also das Produkt zweier Determinanten n. Grades sich schlieſslich als eine Det. desselben Grades darstellen läſst. Zu diesem Zwecke addieren wir die mit a_{11} multiplicierten Elemente der $(n+1)$. Kolonne, die mit a_{21} multiplicierten Elemente der $(n+2)$. Kolonne, ... die mit a_{n1} multiplicierten Elemente der 2n. Kolonne zu den entsprechenden Elementen der 1. Kolonne. Ebenso addieren wir die mit a_{12} multiplicierten Elemente der $(n+1)$. Kolonne, die mit a_{22} multiplicierten Elemente der $(n+2)$. Kolonne, ... die mit a_{n2} multiplicierten Elemente der 2n. Kolonne zu den entsprechenden Elementen der 2. Kolonne. Auf dieselbe Weise fahren wir fort, addieren also schlieſslich die mit a_{1n} multiplicierten Elemente der $(n+1)$. Kolonne, die mit a_{2n} multiplicierten Elemente der $(n+2)$. Kolonne, ... die mit a_{nn} multiplicierten Elemente der 2n. Kolonne zu den entsprechenden Elementen der n. Kolonne.

Alle genannten Umformungen ändern an dem Werte der groſsen Determinante nichts. Die linke obere Ecke von n^2 Elementen besteht jetzt wegen der geeigneten Wahl der rechten obern Ecke aus Nullen, und die ganze Determinante nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & & 0 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & -1 \dots 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \dots -1 \\ a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + \dots + a_{n1} b_{n1}, & a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} \dots + a_{n2} b_{n1}, & \dots & a_{1n} b_{11} + a_{2n} b_{21} \dots + a_{nn} b_{n1}, & b_{11} & b_{21} \dots b_{n1} \\ a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} + \dots + a_{n1} b_{n2}, & a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} \dots + a_{n2} b_{n2}, & \dots & a_{1n} b_{12} + a_{2n} b_{22} \dots + a_{nn} b_{n2}, & b_{12} & b_{22} \dots b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{11} b_{1n} + a_{21} b_{2n} + \dots + a_{n1} b_{nn}, & a_{12} b_{1n} + a_{22} b_{2n} \dots + a_{n2} b_{nn}, & \dots & a_{1n} b_{1n} + a_{2n} b_{2n} \dots + a_{nn} b_{nn}, & b_{1n} & b_{2n} \dots b_{nn} \end{vmatrix}$$

Nach dem Früheren reduciert sich nun diese Determinante von $(2n)^2$ Elementen auf das positive oder negative Produkt der beiden Determinanten vom n. Grade:

$$\begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + \dots + a_{n1} b_{n1}, & a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} + \dots + a_{n2} b_{n1}, & \dots & a_{1n} b_{11} + a_{2n} b_{21} \dots + a_{nn} b_{n1} \\ a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} \dots + a_{n1} b_{n2}, & a_{12} b_{22} + a_{22} b_{22} \dots + a_{n2} b_{n2}, & \dots & a_{1n} b_{12} + a_{2n} b_{22} \dots + a_{nn} b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{11} b_{1n} + a_{21} b_{2n} \dots + a_{n1} b_{nn}, & a_{12} b_{1n} + a_{22} b_{2n} \dots + a_{n2} b_{nn}, & \dots & a_{1n} b_{1n} + a_{2n} b_{2n} \dots + a_{nn} b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \dots & 1 \\ 0 & -1 \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Ist n gerade, so ist die erste dieser beiden Determinanten positiv, weil das 1. Element derselben in ungerader Zeile der 1. Kolonne der groſsen Determinante steht, die zweite Determinante wird $= + 1$.

Ist n ungerade, so wird die erste der beiden Determinanten negativ, weil ihr erstes Element in gerader Zeile der 1. Kolonne der groſsen Determinante steht, die zweite Determinante wird -1.

Das Produkt beider Determinanten wird also auch positiv.

Wir haben demnach folgenden Satz gewonnen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + \dots + a_{n1} b_{n1}, & a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} + \dots + a_{n2} b_{n1}, & \dots & a_{1n} b_{11} + a_{2n} b_{21} + \dots + a_{nn} b_{n1} \\ a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} \dots + a_{n1} b_{n2}, & a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} + \dots + a_{n2} b_{n2}, & \dots & a_{1n} b_{12} + a_{2n} b_{22} + \dots + a_{nn} b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{11} b_{1n} + a_{21} b_{2n} \dots + a_{n1} b_{nn}, & a_{12} b_{1n} + a_{22} b_{2n} \dots + a_{n2} b_{nn}, & \dots & a_{1n} b_{1n} + a_{n2} b_{2n} \dots + a_{nn} b_{nn} \end{vmatrix}$$

Das Produkt zweier Determinanten vom n. Grade wird eine Determinante desselben Grades, in welcher das Element der i. Zeile und der k. Kolonne gleich der Summe der Produkte der Elemente in der i. Kolonne der zweiten Determinante mit den zugehörigen Elementen in der k. Kolonne der ersten Determinante ist.

Anmerkung. Da man in einer Determinante die Zeilen mit den Kolonnen vertauschen kann, so kann das Produkt zweier Determinanten 4 verschiedene Formen annehmen, je nachdem man die Elemente der Zeilen oder Kolonnen der zweiten Determinante mit den Elementen der Zeilen oder der Kolonnen der ersten Determinante multipliciert.

Beispiel.

Es ist $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2. \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 16 + 15 - 6 = 25.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.1 + 3.0 + 1.3, & 0.1 + 6.0 + 5.3, & 1\,1 + 2.0 + 3.3 \\ 2.3 + 3.5 + 1.1, & 0.3 + 6.5 + 5.1, & 1.3 + 2.5 + 3.1 \\ 2.2 + 3.4 + 1.0, & 0.2 + 6.4 + 5.0, & 1.2 + 2.4 + 3.0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 22 & 35 & 16 \\ 16 & 24 & 10 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 22 & 35 & 16 \\ 8 & 12 & 5 \end{vmatrix}$$

Zieht man die mit 3 multiplicierte 1. Kolonne von der 2ten, die mit 2 multiplicierte 1. Kolonne von der dritten ab, so wird das Produkt

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 22 & -31 & -28 \\ 8 & -12 & -11 \end{vmatrix} = 10\,(341 - 336) = 50.$$

Man kann den Multiplikationssatz auch umgekehrt dazu benutzen, eine gegebene Determinante in das Produkt zweier Determinanten umzuwandeln, z. B.:

$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a+c & a+b & b+c \\ a+b & b+c & a+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -a+b+c & a-b+c & a+b-c \\ a-b+c & a+b-c & -a+b+c \\ a+b-c & -a+b+c & a-b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Bildet man aus den n^2 Unterdeterminanten, welche zu den Elementen einer gegebenen Determinante n. Grades gehören, wieder eine Determinante, so erhält man die zu der gegebenen adjungierte Determinante.

Lehrsatz. Die adjungierte Determinante ist gleich der (n — 1). Potenz der gegebenen Determinante.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}$$

Beweis. Nach dem Multiplikationssatz wird:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\,\alpha_{11} + \ldots + a_{n1}\,\alpha_{n1} & \ldots\ldots & a_{11}\,\alpha_{1n} \ldots + a_{n1}\,\alpha_{nn} \\ a_{12}\,\alpha_{11} \quad \ldots + a_{n2}\,\alpha_{n1} & \ldots\ldots & a_{12}\,\alpha_{1n} \ldots + a_{n2}\,\alpha_{nn} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot \\ a_{n1}\,\alpha_{11} \quad \ldots + a_{nn}\,\alpha_{n1} & \ldots\ldots & a_{1n}\,\alpha_{1n} \ldots + a_{nn}\,\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

In dieser Determinante sind sämtliche Elemente in der Diagonalreihe gleich der gegebenen Determinante, alle andern Elemente sind = 0 (nach Satz 5). Die Determinante reduciert sich also auf das Produkt der Elemente in der Diagonalreihe, sie wird also $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}^n$.

Dividieren wir auf beiden Seiten durch die gegebene Determinante, so erhalten wir obigen Satz.

Anwendung der Determinanten auf ein System linearer Gleichungen.

Aufgabe. Es sollen die n Unbekannten $x_1 \ldots x_n$ aus einem System von n Gleichungen 1. Grades bestimmt werden. Die Gleichungen seien:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= A_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= A_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad & \cdot\quad\cdot \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n &= A_n \end{aligned}$$

Man bilde aus den Koefficienten der Unbekannten die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

deren Unterdeterminanten $\alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}$ sind.

Um x_i zu bestimmen, multipliciere man die 1. Gleichung mit α_{1i}, die zweite mit α_{2i}, ... die letzte mit α_{ni} und addiere sämtliche Gleichungen, so erhält man die Gleichung:

$$(a_{11}\,\alpha_{1i} + a_{21}\,\alpha_{2i} \ldots + a_{n1}\,\alpha_{ni})\,x_1 + \ldots\ldots + (a_{1i}\,\alpha_{1i} + a_{2i}\,\alpha_{2i} \ldots\ldots + a_{ni}\,\alpha_{ni})\,x_i \ldots\ldots + (a_{1n}\,\alpha_{1i} + a_{2n}\,\alpha_{2i} \ldots + a_{nn}\,\alpha_{ni})\,x_n$$
$$= A_1\,\alpha_{1i} + A_2\,\alpha_{2i} \ldots + A_n\,\alpha_{ni}.$$

Die Koefficienten der Unbekannten sind Determinanten, welche nach Satz 5 alle mit Ausnahme der Determinante, welche von den Koefficienten von x_i gebildet wird, verschwinden. Es wird also:

$$(a_{1i}\,\alpha_{1i} + a_{2i}\,\alpha_{2i} \ldots + a_{ni}\,\alpha_{ni})\,x_i = A_1\,\alpha_{1i} + A_2\,\alpha_{2i} \ldots + A_n\,\alpha_{ni}.$$

$$x_i = \frac{A_1\,\alpha_{1i} + A_2\,\alpha_{2i} \ldots + A_n\,\alpha_{ni}}{a_{1i}\,\alpha_{1i} + a_{2i}\,\alpha_{2i} \ldots + a_{ni}\,\alpha_{ni}}$$

Der Nenner ist die Determinante der Koefficienten

$$N = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Der Zähler ist eine Determinante, welche sich von der vorigen nur in der iten Kolonne unterscheidet. Man hat nämlich statt der Elemente $a_{1i}\ a_{2i} \ldots a_{ni}$ die auf der rechten Seite der Gleichungen stehenden absoluten Glieder $A_1\ A_2 \ldots A_n$ einzusetzen. Der Zähler wird

$$Z = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & A_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & A_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & A_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es ist demnach:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & A_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & A_2 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & A_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

In Worten ausgesprochen lautet der Satz: Hat man ein System von n Gleichungen 1. Grades mit n Unbekannten, so ist eine zu berechnende Unbekannte gleich einem Bruche, dessen Nenner die Determinante der Koefficienten der Unbekannten ist, dessen Zähler auch eine Determinante ist, die man dadurch aus der Nennerdeterminante erhält, daſs man die Reihe der Koefficienten der gesuchten Unbekannten durch die Reihe der absoluten Glieder ersetzt.

Beispiele.

$$\begin{aligned} -5x + 6y + 7z &= 63 \\ 4x - 5y + 6z &= 17 \\ 3x + 4y - 5z &= -2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 36 & 6 & 7 \\ 17 & -5 & 6 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{Z_1}{N} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 36 & 7 \\ 4 & 17 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}}{N} = \frac{Z_2}{N} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 6 & 36 \\ 4 & -5 & 17 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{N} = \frac{Z_3}{N}$$

$$\begin{aligned} N &= -5 - 4 . (-58) + 3 . 71 = 440. \\ Z_1 &= 36 - 17 (-58) - 2 . 71 = 880 \\ Z_2 &= -5 (-73) - 4 (-166) + 3 . 97 = 1320 \\ Z_3 &= -5 (-58) - 4 (-156) + 3 . 282 = 1760. \end{aligned}$$

$$x = \frac{880}{440} = 2 \qquad y = \frac{1320}{440} = 3 \qquad z = \frac{1760}{440} = 4.$$

$$\begin{aligned} x + y + z + u + v &= 15 \\ x + 2y + 4z + 8u + 16v &= 57 \\ x + 3y + 9z + 27u + 81v &= 179 \\ x + 4y + 16z + 64u + 256v &= 453. \\ x + 5y + 25z + 125u + 625v &= 975. \end{aligned}$$

$$x = \frac{Z_1}{N} \qquad y = \frac{Z_2}{N} \qquad z = \frac{Z_3}{N} \qquad u = \frac{Z_4}{N} \qquad v = \frac{Z_5}{N}$$

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 15 \\ 1 & 5 & 19 & 65 \\ 1 & 7 & 37 & 175 \\ 1 & 9 & 61 & 369 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 50 \\ 2 & 18 & 110 \\ 2 & 24 & 194 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 60 \\ 6 & 84 \end{vmatrix} = 2 . 6 . 24 = 288.$$

Die Umformungen von N ebenso wie die von $Z_1 \, . \, . \, Z_5$ werden hauptsächlich mit Anwendung der Sätze (7) und (2) gemacht.

$$Z_1 = \begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 57 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 179 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 453 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 975 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 27 & 2 & 6 & 14 \\ 134 & 6 & 24 & 78 \\ 393 & 12 & 60 & 252 \\ 900 & 20 & 120 & 620 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 53 & 6 & 36 \\ 231 & 24 & 168 \\ 630 & 60 & 480 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 19 & 24 \\ 100 & 120 \end{vmatrix} = 1440.$$

$$Z_2 = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 57 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 179 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 453 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 975 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 42 & 3 & 7 & 15 \\ 122 & 5 & 19 & 65 \\ 274 & 7 & 37 & 175 \\ 522 & 9 & 61 & 369 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 42 & 3 & 7 & 15 \\ 80 & 2 & 12 & 50 \\ 152 & 2 & 17 & 110 \\ 248 & 2 & 24 & 194 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -78 & -11 & -60 \\ 72 & 6 & 60 \\ 96 & 6 & 84 \end{vmatrix}.$$

$$= -72 \begin{vmatrix} 78 & 11 & 60 \\ 12 & 1 & 10 \\ 16 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -72 \begin{vmatrix} -54 & -50 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1152.$$

$$Z_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 15 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 57 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 179 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 453 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 975 & 125 & 625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 42 & 7 & 15 \\ 1 & 122 & 19 & 65 \\ 1 & 274 & 37 & 175 \\ 1 & 522 & 61 & 360 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 80 & 12 & 50 \\ 152 & 18 & 110 \\ 248 & 25 & 194 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 22 & 35 \\ 88 & 94 \end{vmatrix} = 864.$$

$$Z_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 57 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 179 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 453 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 975 & 625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 42 & 15 \\ 1 & 5 & 122 & 65 \\ 1 & 7 & 274 & 175 \\ 1 & 9 & 522 & 369 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 80 & 50 \\ 2 & 152 & 110 \\ 2 & 248 & 194 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 72 & 60 \\ 96 & 84 \end{vmatrix} = 576.$$

$$Z_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 57 \\ 1 & 3 & 8 & 27 & 179 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 453 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 975 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 42 \\ 1 & 5 & 19 & 122 \\ 1 & 7 & 37 & 274 \\ 1 & 9 & 61 & 522 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 50 \\ 2 & 18 & 110 \\ 2 & 24 & 194 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 60 \\ 6 & 84 \end{vmatrix} = 288.$$

$$x = 5 \quad y = 4 \quad z = 3 \quad u = 2 \quad v = 1.$$

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= a \\ bx + cy + az &= b \\ cy + ay + bz &= c. \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}} = 1. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & c \\ b & b & c \\ c & c & b \end{vmatrix}}{N} = 0. \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ c & a & c \end{vmatrix}}{N} = 0.$$

$$\begin{aligned} (a + b)\,x + (b + c)\,y + (a + c)\,z &= ab + ac + bc \\ (a + c)\,x + (a + b)\,y + (b + c)\,z &= ab + ac + bc \\ (b + c)\,x + (a + c)\,y + (a + b)\,z &= a^2 + b^2 + a^2. \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} ab + ac + bc & b + c & a + c \\ ab + ac + bc & a + b & b + c \\ a^2 + b^2 + c^2 & a + c & a + b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a + b & b + c & a + c \\ a + c & a + b & b + c \\ b + c & a + c & a + b \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{-a + b + c}{2}$$

Man sieht die Richtigkeit der Zerlegung des Zählers von x nach dem Multiplikationssatz sofort ein, wenn man die 1. Zeile mit der 3. vertauscht.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+b & ab+ac+bc & a+c \\ a+c & ab+ac+bc & b+c \\ b+c & a^2+b^2+c^2 & a+b \end{vmatrix}}{-2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix}}{-2}$$

$$y = \frac{a - b + c}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+b & b+c & ab+ac+bc \\ a+c & a+b & ab+ac+bc \\ a+c & a+c & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}}{-2}$$

$$z = \frac{a + b - c}{2}$$

Homogene lineare Gleichungen.

Verschwinden in dem Systeme linearer Gleichungen die Gröſsen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so wird das System homogen.

Wir haben dann:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= 0. \end{aligned}$$

Sind die Gröſsen a alle von einander unabhängig, so genügen diesem Systeme nur die Werte:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \;\ldots\; x_n = 0.$$

Wird jedoch auch die Determinante des Systems $= 0$, so erhalten die Unbekannten den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$.

Setzt man:

$$x_1 = \lambda \alpha_{i1} \qquad x_2 = \lambda \alpha_{i2} \;\ldots\; x_n = \lambda \alpha_{in}$$

wo λ ein beliebiger Koefficient, die Gröſsen α die Unterdeterminanten zu den Elementen einer beliebigen, aber für alle Unbekannten gleichen Zeile sind, so werden sämtliche Gleichungen erfüllt, da

$$a_{k1} \alpha_{i1} + a_{k2} \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{kn} \alpha_{in} = 0$$

ist nicht nur für diejenigen Gleichungen, in welchen k von i verschieden ist, sondern auch für die Gleichung, in welcher $k = i$ ist, da die Determinante des Systems verschwindet.

Es verhält sich dann:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \ldots : \alpha_{in}.$$

z. B.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 6x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 7 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 . 16 - 7 . 2 . + 3(-22) = 0.$$

Es verhält sich:

$$x_1 : x_2 : z_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -22 : -33 : -44$$

$$= \quad 2 : 3 : 4.$$

Dividieren wir alle n Gleichungen eines homogenen linearen Systems durch x_n und setzen:

$$\frac{x_1}{x_n} = y_1 \quad \frac{x_2}{x_n} = x_2 \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n} = y_{n-1}$$

so entsteht ein System von n linearen nicht homogenen Gleichungen zwischen $n - 1$ Unbekannten. Wir können nach vorigem dann folgenden Satz aussprechen: Ein System von n linearen nicht homogenen Gleichungen zwischen $n - 1$ Unbekannten kann nur dann durch bestimmte Werte der Unbekannten gleichzeitig erfüllt werden, wenn die Determinante des Systems verschwindet.

Gemeinsame Wurzel zweier Gleichungen.

Resultante.

Sollen zwei algebraische Ausdrücke:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{und}$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

einen gemeinsamen Faktor haben, so muſs zwischen den Koefficienten a ... u. b ... eine Gleichung herrschen. Es müssen dann die beiden Gleichungen:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

eine gemeinsame Wurzel haben. Multipliciere ich der Reihe nach die erste Gleichung mit x^{m-1}, x^{m-2} ... x, die zweite mit x^{n-1} z^{n-2} ... x, so erhalte ich das System von $n + m$ Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
a_n x^{n+m-1} + a_{n-1} x^{n+m-2} + \ldots + a_1 x^m + a_0 x^{m-1} = 0 \\
\quad a_n x^{n+m-2} + \ldots + a_2 x^m + a_1 x^{m-1} + a_0 x^{m-2} \\
\quad \ldots \\
\quad\quad a_n x^n \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0 \\
b_m x^{n+m-1} + b_{m-1} x^{n+m-2} + \ldots = 0 \\
\quad b_m x^{n+m-2} - \ldots = 0 \\
\quad\quad b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0 = 0
\end{array}$$

Da diese $n + m$ Gleichungen durch einen gemeinschaftlichen Wert von x erfüllt werden müssen, kann ich die $n + m - 1$ verschiedenen Potenzen von x als $n + m - 1$ Unbekannte betrachten. Es muſs dann die ganze Determinante des Systems gleich Null werden. Diese Determinante heiſst die Resultante der beiden Gleichungen:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} \ldots + b_1 x + b_0 = 0.$$

Ist die Resultante gleich 0, so haben diese beiden Gleichungen eine gemeinsame Wurzel. Auch das Auffinden der gemeinsamen Wurzel ist leicht. Wir wollen an einem Beispiele zeigen, wie man dabei zu verfahren hat.

Aufgabe. Es soll der Bruch:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 3}{6x^3 + 5x^2 + 6x - 5} \text{ gehoben werden.}$$

$$\text{Setze} \quad \begin{array}{l} 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3 = 0 \\ 6x^3 + 5x^2 + 6x - 5 = 0. \end{array}$$

Multipliciere beide Gleichungen mit x^2 und x

$$\begin{array}{l}
2x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 - \quad = 0 \\
\quad 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x = 0 \\
\quad\quad 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3 = 0 \\
6x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 5x^2 = 0 \\
\quad 6x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x = 0 \\
\quad\quad 6x^3 + 5x^2 + 6x - 5 = 0
\end{array}$$

Die Resultante wird:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & -3 \\ -4 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ -4 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & -6 \\ -4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 48.4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 48.4 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Resultante $= 0$ ist, haben die beiden Gleichungen eine gemeinsame Wurzel und der Bruch läſst sich heben. Um die gemeinsame Wurzel zu finden, schreiben wir 4 von den vorigen Gleichungen in folgender Form:

$$\begin{aligned} (2x + 3)\, x^3 + 4x^2 - 3x &= 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3 &= 0 \\ (6x + 5)\, x^3 + 6x^2 - 5x &= 0 \\ 6x^3 + 5x^2 = 6x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen eine gemeinsame Wurzel haben, muſs die Determinante des Systems $= 0$ sein.

$$\begin{vmatrix} 2x+3 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ 6x+5 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0. \qquad \begin{vmatrix} 2x+3 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ -4 & -6 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung für x geordnet wird:

$$2x \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -6 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ -4 & -6 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$ax + b = 0.$$

$$a = 2(-60 + 12 + 60) = 24$$

$$b = + \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -8 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = +(36 - 16 - 32) = -12.$$

$$24x - 12 = 0$$

$$x = + \tfrac{1}{2}.$$

Die gemeinsame Wurzel ist $\frac{1}{2}$; der gegebene Bruch muſs sich also durch $x - \frac{1}{2}$ oder was dasselbe ist, durch $2x - 1$ heben lassen.

In der That wird durch $2x - 1$ gehoben

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 3}{6x^3 + 5x^2 + 6x - 5} = \frac{x^2 + 2x + 3}{3x^2 + 4x + 5}.$$

Gleiche Wurzeln einer Gleichung n. Grades.

Diskriminante.

Es soll untersucht werden, ob die Gleichung n. Grades

$$fx = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

2 gleiche Wurzeln hat, und diese Wurzel soll bestimmt werden.

Setzt man in der Gleichung statt x $x + dx$, und sucht in der Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze den Coefficienten von dx auf, welchen wir f^1x nennen wollen, so muſs die Gleichung $f^1x = 0$ die Wurzel, welche in $fx = 0$ doppelt vorkommt, wenigstens einmal haben. Sind nämlich die Wurzeln der Gleichung $fx = 0$. $x_1\ x_2 \ldots x_n$, so ist die Gleichung $fx = 0$ gleichbedeutend mit der Gleichung $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) = 0$.

Setzt man nun hierin statt x x + dx, so wird der Koefficient von dx

$$f'x = a\left\{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}) + (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_n) + \ldots + (x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\right\}.$$

Die Parenthese ist eine Summe von Produkten zu je n — 1 Faktoren. Der fehlende nte Faktor ist im ersten Gliede $x - x_n$, im zweiten $x - x_{n-1}$ . . ., im letzten Gliede $x - x_1$. Sollen nun zwei Wurzeln gleich sein, z. B. $x_k = x_i$, so mufs $x - x_i$ in $f'x$ als Faktor vorkommen; die Gleichung $f'x = 0$, hat demnach auch die Wurzel $x = x_i$. Die gegebene Aufgabe ist dadurch auf die frühere Aufgabe zurückgeführt, zu untersuchen, ob die beiden Gleichungen $fx = 0$ und $f'x = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, und letztere zu bestimmen. Die Resultante ber beiden Gleichungen $fx = 0$ und $f'x = 0$ heifst die Diskriminante der Gleichung $fx = 0$.

Beispiel. Gegeben ist die Gleichung:

$$fx = x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0.$$

$$(x + dx)^3 + (x + dx)^2 - 5(x + dx) + 3$$

$$f'x = 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$\begin{array}{rcl} x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x & = & 0 \\ x^3 + x^2 - 5x + 3 & = & 0 \\ 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 & = & 0 \\ 3x^3 + 2x^2 - 5x & = & 0 \\ 3x^2 + 2x - 5 & = & 0 \end{array}$$

Die Diskriminante ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ -1 & 10 & -9 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -14 & 3 \\ -1 & 10 & -9 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 11(-32) + 64 + 288 = 0.$$

$$\begin{array}{rcl} (x + 1)x^3 - 5x^2 + 3x & = & 0 \\ x^3 + x^2 - 5x + 3 & = & 0 \\ 3x^3 + 2x^2 - 5x & = & 0 \\ 3x^2 + 2x - 5 & = & 0. \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 9 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}}_{a} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}}_{b} = 0$$

$$a = 25 - 38 + 45 = 32$$

$$b = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 3 \\ 17 & -14 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 70 - 17 \cdot 34 + 3 \cdot 42 = -32.$$

$$32x - 32 = 0.$$

$$x = 1.$$

Die Gleichung $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ enthält demnach die Wurzeln $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Die dritte Wurzel wird bestimmt aus der Gleichung:

$$\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 2x + 1} = x + 3 = 0$$

$$x_3 = -3.$$

Schlufsbemerkung. Aus den hier gemachten Anwendungen der Determinantentheorie erhellt schon die grofse Bedeutung dieser Disciplin; noch gröfsere Anwendung finden die Determinanten aber in der analytischen Geometrie und in der Mechanik, allerdings Gebiete, die über das Pensum unserer Schule hinausgehen.

I. Die allgemeine Lehrverfassung des Realprogymnasiums und der damit verbundenen Vorschule.

1. Uebersicht über die einzelnen Lehrgegenstände und die für jeden derselben bestimmte Stundenzahl während des Schuljahres Ostern 1887 bis Ostern 1888.

Unterrichts-Gegenstände.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	Sa.
1. Religion	2		2		2	2	3	2	2	2	17
2. Deutsch	3		3	3	3	3	3	8	7	6	39
3. Latein	5		6	6	7	7	8				39
4. Französisch	4		4	4	5	5					22
5. Englisch	3		4	4							11
6. Geschichte	2		2	2	2	2	1				11
7. Geographie	1		2	2	2	1	2	2			12
8. Math. u. Rechnen	5		5	5	5	4	5	5	4	6	44
9. Naturbeschreib.		2	2		2	2	2				10
10. Physik	3										3
11. Chemie	2										2
12. Schreiben						2	2	3		2	9
13. Zeichnen	2		2		2	2	2				9
	in 3 kombinierten St.										
14. Singen	(2)		(2)		(2)	(2)	2	1			5
	kombiniert 2										
15. Anschauungs-Unterricht									2		2
											235

2. Uebersicht der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer für das Schuljahr 1887/8.

Nro.	Namen.	Ordinarius.	II a.	II b.	III a.	III b.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	Sa.
1.	**Jacobi,** Rektor.	II	Latein 5. Deutsch 3.		Latein 6.								14
2.	**Dr. Müller,** Oberlehrer.	IV.	Physik 3. Chemie 2.	Naturbeschreib. 2.	Naturbeschreibung 2.		Naturbeschreib. 2. Latein 7.	Naturbeschreib. 2.	Naturbeschreib. 2.				22
3.	**Capeller,** ord. Lehrer.	III a.	Französisch 4. Englisch 3.		Französ. 4. Englisch 4.	Französ. 4. Englisch 4.							23
4.	**Dr. Schneider,** ord. Lehrer.	III b.	Religion 2. Geschichte 2. Geographie 1.		Deutsch 3. Religion 2. Gesch. 2. Geograph. 2.	Deutsch 3. Gesch. 2.	Religion 2.		Religion 3.				24
5.	**Powel,** ord. Lehrer.	—	Mathematik 5.		Mathematik 5.	Mathematik 5.	Mathematik 3. Rechnen 2.	Rechnen 4.					24
6.	**de la Chaux,** ord. Lehrer.	V.				Latein 6.		Latein 7. Deutsch 3.	Latein 8.				24
7.	**Thoene,** ord. Lehrer.	—				Geograph. 2.	Deutsch 3. Französ. 5. Gesch. 2. Geograph. 2.	Französ. 5. Gesch. 2. Geograph. 1.	Gesch. 1. Geograph. 2.				25
8.	**Korell,** techn. Lehrer.	VI.	Zeichnen 2. in 3 kombinierten St. Gesang kombiniert 2		Zeichnen 2.		Zeichnen 2.	Religion 2. Schreiben 2. Zeichnen 2.	Rechnen 5. Deutsch 3. Zeichnen 2. Gesang 2.	1 Gesang.			26 (1)
9.	**Puschke,** Elem.-Lehrer.	VII. u. VIII.								Schreiben 3. Deutsch 8.	Deutsch 7.	Schreiben 2. Schreiblesen 6.	26
10.	**Klein,** Elem.-Lehrer.	IX.							Schreiben 2.	Religion 2. Geograph. 2. Rechnen 5.	Anschauungsunterricht 2. Religion 2 Rechnen 4.	Religion 2. Rechnen 6.	27
													235

Der Turnunterricht wurde für das Realprogymnasium nur während des Sommers in 4 Abteilungen und zusammen 5 Stunden wöchentlich durch den technischen Lehrer Korell, für die VII u. VIII der Vorschule ebenso in einer Stunde durch denselben Lehrer erteilt.

3. Übersicht über die während des abgelaufenen Schuljahres absolvierten Pensen.

Sekunda. Ordinarius: Der Rektor.

Religion. 2 St. wöchentlich. — C. Noack, Hilfsbuch. — Dr. Schneider. — Kurze Einleitung in die Bücher des neuen Testamentes. Ausgew. Abschnitte aus den Briefen Pauli wurden gel. und erklärt. Buch Hiob. Einiges aus den Propheten, besonders berücksichtigt wurden die messian. Weissagungen. Wiederholung des 4. und 5. Hauptst. Kirchenlieder im Anschluſs an das Kirchenjahr wiederh.

Deutsch. 3 St. wöchentlich. Der Rektor. Gelesen und durchgearbeitet wurden Schillers Maria Stuart, Herders Cid, Göthes Hermann und Dorothea, Lessings Minna von Barnhelm, Schillers Wilhelm Tell, Herders Legenden, Uhlands Herzog Ernst. Im Anschluſs hieran wurden die litterarhistorischen Verhältnisse besprochen. Das Wichtigste aus der Lehre vom Aufsatz wurde durchgenommen, in Verbindung damit praktische Dispositionsübungen. Monatliche Aufsätze.

Themata zu den deutschen Arbeiten waren folgende:

1) II A. Inhaltsangabe des zweiten Aufzuges } von Schillers Maria Stuart. (Klassenarbeit.)
II B. Inhaltsangabe des ersten Aufzuges }
2) Labor non onus sed beneficium.
3) Durch welche Umstände wird in Schillers Maria Stuart die Hinrichtung der Heldin verzögert?
4) Welche Gründe hatte Mortimer, die Befreiung der Königin Maria Stuart zu versuchen, und welcher Mittel bediente er sich, dieses zu verwirklichen?
5) Der Mensch ein zerstörendes Wesen!
6) II A. Cids Erlebnisse auf seinem Feldzuge in Valencia und Cids Ende. Nach Herders Cid. } (Klassenarbeit)
II B. Cids Erlebnisse unter Ferdinand dem Groſsen. Nach Herders Cid. }
7) Welche beherzigenswerten Mahnungen verkündet uns der Winter?
8) II A. Das Hauptsächlichste aus den drei letzten Gesängen von Göthes „Hermann und Dorothea“. } (Klassenarbeit.)
II B. Das Hauptsächlichste aus den drei ersten Gesängen von Göthes „Hermann und Dorothea“. }
9) II A. Charakteristik der wichtigsten Personen in Lessings „Minna von Barnhelm“.
II B. Die Frauencharaktere in Lessings „Minna von Barnhelm“.
10) Was erfahren wir in Göthes „Hermann und Dorothea“ über das Städtchen und seine nächste Umgebung, und wie teilt uns der Dichter dieses mit? (Klassenarbeit.)
11) Eine Klassenarbeit aus Schillers „Wilhelm Tell“.

Für den Ostertermin 1888 war als deutsches Prüfungsthema gestellt: Was erfahren wir in Göthes „H. u. D.“ über das Städtchen und seine nächste Umgebung, und wie teilt uns der Dichter dieses mit?

Latein. 5 St. wöchentlich. Ellendt-Seyfferts lat. Grmtk. Ostermann, lat. Übungsbuch für Tertia. Der Rektor. Das grammatische Pensum der früheren Klassen wurde in Verbindung mit Übersetzungsübungen nach Ostermann wiederholt. Neu durchgearbeitet wurden die §§ 234 — 247 u. 279 — 343. Die Lektüre bestand in Cic. 4. Catilin. Rede u. pro Archia Poeta, in Ovids Metam. I, 1—240; III, 1—130. Wöchentlich ein Extemporale oder Exercitium. Daneben wurden besonders zur Einübung der oratio obliqua geeignete Abschnitte aus Cäs. de b. G., teils kursorisch, gelesen.

Französisch. 4 St. wöchentlich. — Plötz, Schulgrammatik. — Capeller. — Alle 14 Tage eine Korrekturarbeit. Wiederholungen aus den Pensen der vorhergehenden Klassen. Lektion 50 bis zu Ende: Gebrauch des Subjonctif; Participe présent; Participe passé; Gebrauch der Artikel; Comparaisons d'égalité et d'inégalité; Konkordanz des Adjectivums; Stellung des Adjectivums; Eigentümlichkeiten im Gebrauch der Adverbia; Gebrauch der Pronomina; Konkordanz des Verbs mit dem Subjekt; Kasus der Verba; Infinitiv mit und ohne Präposition. Lektüre: Montesquieu, Considérations etc.; Scribe, Bertrand et Raton etc.

Englisch. 3 St. wöchentlich. — Sonnenburg, Gram. der engl. Sprache. — Capeller. — Alle 14 Tage eine Korrekturarbeit. — Wiederholungen aus den Pensen der vorhergehenden Klassen. Lektion 23 der Hauptsache nach bis zu Ende: Gerundium; Absoluter Nominativ, Accusativus cum Infinitivo; Gebrauch der Kasus; Gebrauch der Tempora, Adjectiva, Artikel, Pronomina; die hauptsächlichsten Präpositionen und Konjunktionen. Lektüre: Goldsmith, The Vicar of Wakefield im Sommersemester, u. Lamb, Tales from Shakespear im Wintersemester.

Geschichte. 2 St. wöchentlich. — Eckertz: Hilfsbuch. — Dr. Schneider. — Deutsche Geschichte von der Völkerwanderung bis zur Neuzeit.

Geographie. 1 St. wöchentlich. Daniel: Leitfaden. — Dr. Schneider. — Genaue Durchnahme der vier Erdteile aufser Europa unter besonderer Berücksichtigung der Erzeugnisse der Länder. Wiederh. wurde die Geographie von Deutschland.

Mathematik. 5 St. Bardey, Aufgabensammlung. Logarithmentafel von Gaufs. — Powel. — Alle 4 Wochen eine gröfsere Korrekturarbeit.

a. Arithmetik. 2 St. Definition und Lehrsätze von den Logarithmen. Rechnung mit Logarithmen. Anwendung derselben auf die Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke und logarithmische resp. Exponentialgleichungen. Zinseszins- u. Rentenrechnung.

b. Trigonometrie. 2 St. Goniometrie. Das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck, Behandlung des allgemeinen Dreiecks. Trigonometrische Gleichungen. Dreiecksaufgaben, welche auf trigonometrische Gleichungen führen.

c. 1 St. Ergänzung der ebenen Geometrie. Wiederholung durchgenommener Sätze, Besprechung neuer Arbeiten und Durchnahme korrigierter Arbeiten.

Für den Ostertermin 1888 waren in der Mathematik folgende 4 Prüfungs-Aufgaben gestellt:

1) Es zahlt jemand an eine Bank 1100 M. und legt am Ende jeden Jahres 250 M. dazu. Er stirbt nach 23 Jahren; von da ab erhält seine Frau lebenslänglich eine Jahresrente von 900 M., die zum ersten Male 1 Jahr nach dem Tode ihres Mannes ausgezahlt wird. Die Frau lebte noch 20 Jahre nach dem Tode ihres Mannes. Hatte die Bank Vorteil oder Schaden, wenn die Zinsen zu 4 % gerechnet werden?

2) In eine Halbkugel von Radius $r = 9$ hat man einen Würfel, in diesen eine Kugel und in diese ein Tetraeder einbeschrieben. Wie grofs ist der Inhalt des letzten Körpers?

3) Zur Berechnung eines Dreiecks ist gegeben

$$r = 2587 \quad \rho = 1125 \quad \gamma = 72^0\ 43'\ 24''.$$

4) Zur Construktion eines Sehnenvierecks sind 2 gegenüberliegende Seiten a und c und die beiden Diagonalen e und f gegeben.

Naturbeschreibung. — Sekunda B. — 2 St. — Schilling, Kleine Naturgeschichte. — Dr. Müller. — Sommersemester: Botanik: das natürliche System. Das Wichtigste aus der Anatomie und Physiologie der Pflanzen. Wintersemester: Mineralogie: Krystallographie und Beschreibung von Mineralien, soweit die Schulsammlung dazu Gelegenheit bietet. Zoologie: das Wichtigste aus der Anatomie und Physiologie der Menschen und der Tiere.

Physik. — Sekunda A und B. — 3 St. — Jochmann, Experimentalphysik. — Dr. Müller. — Mechanik, Elektrizität, Magnetismus.

Chemie. — Sekunda A. — 2 St. — Lorscheid, Leitfaden der anorganischen Chemie. — Dr. Müller. — Metalloide.

Tertia A. und B. kombiniert.

Religion. 2 St. wöchentlich. C. Noack: Hilfsbuch f. d. ev. Relig. — Dr. Schneider. — Geschichte des Lebens Jesu im Anschlufs an das Matthäusevangelium. Im Winterhalbjahr: Leben und Wirken der Apostel im Anschlufs an die Apostelgeschichte. Die Hauptstücke wurden wiederholt, neugelernt das 5. Psalm 90 und 121 wurden neugelernt, ebenso 3 Kirchenlieder. Bilder aus der Mission unter den Germanen und aus der Reformationsgeschichte. (Luther, Zwingli, Kalvin. P. Gerhard. A. H. Franke.)

Naturbeschreibung. — Tertia A. und B. — 2 St. — Schilling, Kleine Naturgeschichte. — Dr. Müller. — Sommersemester: Botanik. Beschreibung natürlicher Familien Wintersemester: Mineralogie. Beschreibung von Mineralien, soweit die Schulsammlung dazu Gelegenheit bietet.

Tertia A. Ordinarius: Capeller.

Deutsch. 3 St. Hopf und Paulsiek für III. — Dr. Schneider. — Erklären poetischer und prosaischer Musterstücke, besonders im Anschlufs an den Geschichtsunterricht. Lohengrin- und Rolandsage. Übungen im Disponieren. Gelernt wurden: Der Handschuh, die Kraniche des Ibykus, der Taucher, der Gang nach dem Eisenhammer, des Sängers Fluch. Dreiwöchentliche Aufsätze:

Themata:

1) Das Grab im Busento und: Der Pilgrim vor St. Juste von A. v. Platen. (Ein Vergleich.)
2) Schilderung eines mittelalterlichen Schützenfestes. (Nach: G. Kinkel: Otto der Schütz.)
3) Karl XII. und der pommersche Bauer Müsebäk. (Klass.-Aufsatz.)

4) Welche Umstände machten die Engländer zu einem seefahrenden und handeltreibenden Volke?
5) Geben ist seliger denn nehmen.
6) Ein von den isthmischen Spielen zurückgekehrter Grieche erzählt die wunderbare Entdeckung der Mörder des Ibykus. (Klass.-Aufsatz.)
7) Welche Eigenschaften des Körpers und des Geistes kennzeichnen uns Friedrich den Zweiten als grofsen Feldherrn?
8) Geschichte vom Meerbräutigam. (Nach: Uhland: Normannischer Brauch.) Klassenaufs.
9) Fridolin, in Schillers Gedicht: Der Gang nach dem Eisenhammer.
10) Indianische Leichenfeier. (Nach Schiller: Nadowessische Totenklage.)
11) a. Inhaltsangabe der Idylle: Der siebzigste Geburtstag. (Vofs.) } Klass.-Aufs.
b. Rom ist nicht in einem Tage erbaut. }

Latein. 6 St. wöchentlich. Ellendt-Seyffert, lat. Grmtk. Ostermann, lat. Übungsbuch für III. Der Rektor. Wiederholt wurden frühere Pensa, besonders die Kasuslehre. Neu durchgearbeitet wurden aus der Grmtk. die §§ 187—201, 281—303, 315—342. 304 u. 305 im Anschlufs an die Lektüre, ebenso die Hauptsachen aus der oratio obliqua. Gelesen wurde Cäs. de b. G. lib. V und VI.

Französisch. 4 St. wöchentlich. — Plötz, Schulgrammatik, Voltaire, Hist. de Charles XII und Plötz, Petit Vocabulaire. — Capeller. — Alle 14 Tage eine Korrekturarbeit. — Wiederholung des Pensums der vorhergehenden Klassen. Lektion 29—38: Geschlecht der Substantiva, Pluralbildung, Bildung der weiblichen Form der Adjectiva, Bildung der Adverbia, Zahlwörter, Präpositionen und deren Gebrauch. Lektüre: Chap. I und zum Teil II aus Voltaire, Hist. de Charles XII.

Englisch. 4 St. wöchentlich. — Sonnenburg, Gram. der engl. Sprache und Scott, Tales of a Grandfather. — Capeller. — Lektion 12—23: Vollständige Einübung der Aussprache; Bildung der Adverbien; die Pronomina; alle Regeln über Deklination und Konjugation; Komparation der Adjectiva. Wiederholungen. Lektüre: Verschiedene Kapitel aus Scott, Tales of a Grandfather.

Geschichte. 2 St. Eckertz: Hilfsbuch. — Dr. Schneider. — Deutsche Geschichte von 1618 bis zur Gegenwart, besonders berücksichtigt wurde die brandenburgisch-preufsische Geschichte.

Geographie. 2 St. Daniel: Leitfaden. — Dr. Schneider. — Donautiefland, Frankreich, Grofsbritannien und Irland, Skandinav. H. I., Dänemark, Rufsland. Daniel § 80—84. Die Alpen und Geographie von Deutschland, Österreich und die kleineren Staaten deutscher Nationalität. Daniel § 85—104.

Mathematik. 5 St. Bardey, Aufgabensammlung, Ohlert, Geometrie. — Powel. — Alle 4 Wochen eine Korrekturarbeit.

a. Rechnen. 1 St. Anwendung der Gleichungen auf in Worte gekleidete Aufgaben mit Hilfe der abgekürzten Rechnung mit Decimalzahlen.
b. Arithmetik. 2 St. Auflösung eines Systems von n Gleichungen 1ten Grades mit n Unbekannten nach den bekannten Methoden und mit Hilfe von Determinanten. Einfachere Gleichungen zweiten Grades. Potenzsätze und deren Anwendung für negative und gebrochene Exponenten.
c. Geometrie. 2 St. Von der Proportionalität der Linien und der Ähnlichkeit der Figuren; von den regelmäfsigen Polygonen und der Ausmessung des Kreises.

Tertia B. Ordinarius: Dr. Schneider.

Deutsch. 3 St. wöchentlich. Hopf u. Paulsiek f. III. — Dr. Schneider. — Erklärung poetischer und prosaischer Stücke, besonders im Anschlufs an den Geschichtsunterricht. Behandlung der wichtigsten Sagenkreise (Nibelungenlied, Gudrun). Dreiwöchentliche Aufsätze.

Latein. 6 St. wöchentlich. — Ellendt-Seyffert, Grammatik. — de la Chaux. Sommersemester: Gramm. §§ 129—154. Lektüre: Cornelius Nepos, Miltiades; Themistocles. Wintersemester: Gramm. §§ 155—186. Wiederholungen der früheren Pensa. Lektüre: Aristides, Alcibiades, Conon. — Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale.

Französisch. 4 St. wöchentlich. — Plötz, Schulgrammatik, Chrestomathie und Petit Vocabulaire. — Capeller. — Alle 14 Tage eine Korrekturarbeit. Wiederholung des Quartanerpensums. Lektion 1—28: Konjugation der franz. (trans., intrans. und unpersönlichen) Verba. Lektüre: Stücke aus Plötz, Lect. Chois.

Englisch. 4 St. wöchentlich. — Sonnenburg, Gram. d. engl. Sprache. — Capeller. — Alle 8 Tage eine Korrekturarbeit. Das Pensum für Untertertia enthält die Hauptregeln über die Aussprache der Vokale, Konsonanten und Diphthonge. Von der Formenlehre: Die Deklination der Substantiva, Pluralbildung, das Adjectiv, die vollständige Konjugation des Verbums, die unregelmäfsigen Verba.

Geschichte. 2 St. Eckertz: Hilfsb. Dr. Schneider. Deutsche Geschichte von der Völkerwanderung bis zum 30jährigen Kriege.

Geographie. 2 St. wöchentlich. Daniel: Leitfaden. — Thoene. — Sommersemester: Asien und Afrika (Daniel § 38 – 60). Wintersemester: Amerika (ohne das Spezielle der Vereinigten Staaten), Australien und Polynesien, die drei südlichen Halbinseln von Europa (Daniel § 61 — 79). Wiederholungen.

Mathematik 5 St. Bardey, Aufgabensammlung, Ohlert, Geometrie. — Powel. — Alle 4 Wochen eine Korrekturarbeit.

a. Rechnen. 1 St. Wiederholung und Fortsetzung der abgekürzten Decimalbruchrechnung. Anwendung der Gleichungen auf in Worte gekleidete Aufgaben.

b. Arithmetik 2 St. Gleichungen vom 1. Grade mit einer und zwei Unbekannten, Quadratwurzeln, Kubikwurzeln aus Buchstabenausdrücken. Potenzregeln für positive und negative ganze Exponenten.

c. Geometrie. 2 St. Die Sätze von der Gleichheit der Figuren. Kreissätze, merkwürdige Punkte. Zahlreiche Constructionsaufgaben.

Der Abdruck der Pensen für sämtliche Klassen bleibt dem nächstjährigen Programm vorbehalten.

Lehrbücher, welche gebraucht werden.

1) Religion. Die 64 Kirchenlieder, biblische Geschichte von Preufs. Noack in Tertia und Sekunda.
2) Deutsch. Schreib-Lese-Fibel von Hammer und Kuhn. Hopf und Paulsiek für VIII bis III. Herbst, Hilfsbuch für die deutsche Litteraturgeschichte für II.
3) Latein. Grammatik von Ellendt-Seyffert für V—II, Ostermann für VI—II, Weller für IV.
4) Französisch. Plötz, Elementarbuch für V und IV, Plötz, Grammatik für III und II, Plötz, Lectures choisies. Napoléon en Egypte; Mademoiselle De la Seiglière par Sandeau.
5) Englisch. Sonnenburg, Englische Grammatik für II und III; Sonnenburg, Übungsbuch; Lektüre W. Scott: Tales of a grand father für III, Ch. Lamb, Tales from Shakespeare; Boyle, William I, German Emperor and King of Prussia für II.
6) Geschichte. Herbst, histor. Hilfsbuch für II; Eckertz, Hilfsbuch für den Unterricht in der deutschen Geschichte für III, Jäger, Hilfsbuch für IV.
7) Geographie. Daniel für VI — II.
8) Mathematik. Ohlert, Planimetrie IV; Bardey, Aufgabensammlung; Mehler, Elementar-Mathematik.
9) Naturgeschichte. Schilling.
10) Physik. Jochmann, Grundrifs der Experimentalphysik.
11) Chemie. Lorscheid, Leitfaden der anorganischen Chemie.

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörden von allgemeinem Interesse.

a. des Königl. Provinzial-Schul-Kollegiums zu Königsberg:

Vom 28. April. Es wird das Verzeichnis der dem Realprogymnasium überwiesenen Inventarienstücke der aufgelösten Gewerbeschule zu Königsberg übersendet. cf. infra sub V.

Vom 15. Mai. Es wird bekannt gegeben, dafs nach einer Verfügg. d. Herrn Ministers vom 30. April d. J. kein zu einem Kursus zur Ausbildung von Turn-, Taubstummen-, Zeichenlehrern zugelassener Lehrer ohne spezielle Genehmigung des Herrn Ministers während der Dauer des Kursus aus seinem Amte entlassen werden darf.

Vom 31. Mai. Es wird mitgeteilt, dafs nach einer Verfügg. des Herrn Ministers vom 1. April d. J. fortan Anträge auf Bewilligung von laufenden oder einmaligen Unterstützungen für die Hinterbliebenen von Lehrern bei dem Königl. Prov.-Schul-Kolleg einzureichen sind.

Vom 12. Juni. Im Auftrage des Herrn Ministers wird den Lehrern der höheren Lehranstalten die sorgfältige Erhaltung etwaniger in den Sammlungen der Anstalten vorhandener früh- und vorgeschichtlicher Altertümer zur besonderen Pflicht gemacht.

Vom 20. Juli. Es wird vorausgesetzt, dafs die Lehrer der höheren Unterrichts-Anstalten das seltene Naturereignis der am 19 Aug. stattfindenden totalen Sonnenfinsternis benutzen, ihre Schüler über die Ursachen und den Zusammenhang der Erscheinung zu belehren. Als Leitfaden für diese zu gebende Unterweisung erhält die Anstalt ein Exemplar der Schrift von Zenker „Sichtbarkeit und Verlauf der totalen Sonnenfinsternis in Deutschland am 19. August 1887“ zugewiesen.

Vom 16. August. Der Rektor wird angewiesen, die beiden ordentlichen Lehrer de la Chaux und Thoene zu vereidigen.

Vom 11. September. Es wird über einen Erlafs des Herrn Ministers über die im Juni d. J. durch Herrn Geheimen Ober-Regierungsrat Dr. Wehrenpfennig in Begleitung des Herrn Provinzial-Schulrates E. Trosien vorgenommene Revision der Anstalt berichtet.

Vom 7. Oktober. Es wird genehmigt, dafs der Oberlehrer Dr. Müller an der hiesigen landwirtschaftlichen Winterschule in wöchentlich drei Stunden unterrichtet.

Vom 13 December. Die Einführung des Lehrbuchs von Mehlers Elementar-Mathematik und des Hilfsbuchs von Herbst für die deutsche Litteraturgeschichte von Ostern 1888 ab wird genehmigt.

Vom 9. Januar 1888. Die Lage der Ferien pro 1888 wird mitgeteilt

1. Osterferien:	14 Tage	vom	28. März	bis zum	12. April;
2. Pfingstferien:	5 „	„	18. Mai	„ „	24. Mai;
3. Sommerferien:	4 Wochen	„	30 Juni	„ „	30. Juli;
4. Michaelisferien:	14 Tage	„	26. September	„ „	15. Oktober;
5. Weihnachtsferien:	14 „	„	22. December	„ „	7. Januar 1889.

b. des Magistrats.

Vom 22. April. Es wird mitgeteilt, dafs die durch Pensionierung des Lehrers Jordan vakant gewordene vierte ord. Lehrerstelle dem ord. Lehrer Powel und die durch das Aufrücken des letztern erledigte fünfte ord. Lehrerstelle dem Schulamts-Kandidaten de la Chaux vom 1. April d. J. definitiv übertragen ist.

Vom 19. Juli. Es wird bekannt gegeben, dafs die Ascension der ord. Lehrer Dr. Schneider, Powel, de la Chaux in die 2., 3., 4. ord. Lehrerstelle, sowie die definitive Anstellung des Schulamts-Kandidaten Thoene als 5. ord. Lehrer vom 1. Juli ab seitens des Königl. Prov.-Schul-Kollegiums genehmigt ist.

III. Chronik der Schule.

Das abgelaufene Schuljahr begann Montag den 18. April 1887. Die mannigfachen Störungen, denen im vorhergehenden Schuljahre (cf. Programm v. J. pag. 28) der Unterrichtsbetrieb ausgesetzt gewesen ist, haben zum Segen der Anstalt in dem eben abgelaufenen Zeitraume Ostern 1887/8 keine Wiederholung erlebt.

Mit dem ersten April wurde die durch Pensionierung des ord. Lehrers Jordan vakant gewordene vierte ord. Lehrerstelle dem ord. Lehrer Powel, und die durch Aufrücken des letztern erledigte fünfte ord. Lehrerstelle dem seit dem 1. Oktober 1886 an der Anstalt beschäftigten Schulamtskandidaten de la Chaux*) vom Patronate im Einverständnisse mit dem Königlichen

*) Gustav de la Chaux, geboren zu Swirgsden, Kreis Darkehmen am 20. Januar 1857, besuchte das Gymnasium zu Bartenstein, studierte in Königsberg von Ostern 1878 bis dahin 1883 alte Sprachen, bestand am 17. Juli 1885 seine Prüfung pro facultate docendi; absolvierte von Michaelis 1885 bis dahin 1886 sein Probejahr an dem Königl. Friedrichs-Gymnasium zu Gumbinnen, von Michaelis 1886 bis Ostern 1887 als wissenschaftlicher Hülfslehrer thätig am städtischen Realprogymnasium zu Gumbinnen, Ostern 1887 an derselben Anstalt definitiv angestellt.

Provinzial-Schul-Kollegium übertragen. Die Vertretung des bis dahin noch beurlaubten 2. ord. Lehrers Rohde (cf. Programm v. J. l. c.) wurde dem seit dem 1. November an der Anstalt beschäftigten Schulamtskandidaten Kurt Thoene bis auf weiteres übertragen unter gleichzeitiger Erhöhung der Remuneration von 1500 Mk. auf 2100 Mk. jährlich.

Mit dem 15. Mai d. Js. trat der bisherige 2. ord. Lehrer Rohde, dem durch Ministerialrescript vom 15. April d. Js. die Kreis-Schulinspektion Neidenburg vom 15. Mai kommissarisch übertragen worden war, aus dem Verbande des Lehrerkollegiums aus.

Herr Wilhelm Rohde, der seit Michaelis 1880 an hiesiger Anstalt mit wahrer, inniger Liebe für seinen Beruf, mit unverkennbarem Geschick und mit sichtlichem Erfolge gewirkt hat, ist jederzeit sich gleich geblieben; ein strenger, aber gerechter und liebevoller Lehrer seinen Schülern, ein aufrichtiger, entgegenkommender und treuer Freund und Kollege seinen Amtsgenossen gegenüber, hat er sich ein bleibendes, freundliches Andenken in den Herzen von Lehrern und Schülern für alle Zeit gesichert. Ein besonderer Dank namens der Anstalt sei ihm an dieser Stelle von dem Unterzeichneten für die langjährige mühevolle Verwaltung der Schüler-Lesebibliothek ausgesprochen. Mit ebenso grofser Geduld und Liebe zur Sache wie mit dem richtigen Verständnis, den Bedürfnissen der Schüler nach jeder Seite hin Rechnung zu tragen, hat er sich auch dieser Aufgabe unterzogen und gezeigt, dafs er derselben wohl gewachsen war. Möge es ihm unter Gottes gnädigem Beistande vergönnt sein, in seinem neuen, gröfseren und verantwortungsvolleren Berufe mit gleichem Erfolge wie bisher wirken zu dürfen!

Durch diese eingetretene Vakanz fand mit dem ersten Juli ein nochmaliges Aufrücken der Lehrer in der Weise statt, dafs Herr Dr. Schneider in die zweite, Herr Powel in die dritte, Herr de la Chaux in die vierte ordentliche Lehrerstelle ascendierten, während dem Schulamtskandidaten Herrn Kurt Thoene*) die fünfte ord. Lehrerstelle definitiv übertragen wurde.

Mit der definitiven Anstellung des Herrn Thoene hatten die für einen stetigen und gedeihlichen Unterrichtsbetrieb nur zu nachteiligen Störungen ihr Ende erreicht. In hohem Grade wünschenswert wäre es, bliebe das Lehrerkollegium in seiner augenblicklichen Zusammensetzung der Anstalt für eine längere Reihe von Jahren erhalten. Denn zu ebenso grofser wie aufrichtiger Freude gereicht es dem Unterzeichneten, auch an dieser Stelle allen Lehrern der Anstalt die offene und ehrliche Anerkennung auszusprechen für die bisherige treue, gewissenhafte und erfolgreiche Hingabe an ihre Berufsthätigkeit.

Der vorgesetzten Königlichen Behörde sowie der Patronatsbehörde und den Herren Stadtverordneten spreche ich für das der Anstalt entgegengebrachte grofse Vertrauen, für das ebenso wohlthuende wie aufmunternde Wohlwollen namens des Lehrerkollegiums den ehrerbietigsten Dank aus.

Gottes Segen aber möge wie bisher so auch fernerhin über der Anstalt mit ihren Lehrern und Schülern ruhen!

Der Sedantag wurde im engen Kreise der Anstalt durch ein einleitendes Gebet und eine auf die Wichtigkeit des Tages hinweisende Ansprache des Geschichtslehrers, durch Deklamation und Gesang festlich begangen.

---

*) Kurt Thoene, geboren zu Caymen, Kreis Labiau, am 3. März 1860, besuchte das Realgymnasium auf der Burg in Königsberg i. Pr., studierte in Königsberg und Berlin von Ostern 1877 bis Michaelis 1881 neuere Sprachen und Deutsch, bestand am 30. Juni 1883 seine Prüfung pro facultate docendi, absolvierte von Michaelis 1884 bis dahin 1885 sein Probejahr an dem Königlichen Friedrichs-Collegium in Königsberg i. Pr., von Michaelis 1885 bis 1. April 1886 als wissenschaftl. Lehrer thätig am Realprogymnasium zu Pillau, vom 1. November 1886 in gleicher Eigenschaft thätig am Realprogymnasium zu Gumbinnen, 1. Juli 1887 an derselben Anstalt als letzter ord. Lehrer definitiv angestellt.

Die für den 22. März 1888 bereits getroffenen Vorbereitungen sind dieses Jahr — vergebliche gewesen! Statt des Jubelns und Jauchzens allüberall in Deutschlands weiten Gauen, allüberall, soweit die deutsche Zunge klingt und Gott im Himmel Lieder singt, — das während der verflossenen 27 Jahre an diesem Tage Millionen treuer Herzen freudig durchzitterte, wie anders dieses Jahr!

Schmerzlich bewegt und noch ganz unter dem Eindruck der Trauerkunde, die auch in unserer Stadt bereits in den Vormittagsstunden des 9. März eine blitzähnliche Verbreitung fand und alt und jung, hoch und niedrig, arm und reich gleichmäfsig erschütterte, haben wir uns mit der vollendeten Thatsache abzufinden, dafs das treue landesväterliche Auge Sr. Majestät, unseres Allgeliebten, Allergnädigsten Kaisers und Königs Wilhelm I. sich für diese Zeitlichkeit geschlossen, dafs Sein Herz für das grofse deutsche Volk, das Ihm in grenzenloser Liebe und Verehrung treu ergeben war, zu schlagen aufgehört hat.

Beugen wir uns in Demut unter den Willen des Allmächtigen, dessen unerforschlicher Ratschlufs es war, unsern Heldenkaiser und Friedensfürsten, den obersten Schirmherrn Deutschlands von dem erhabenen Platze auf der Hochwacht der Menschheit gerade jetzt in die Vollkommenheit des Jenseits abzurufen.

Wir aber alle, die wir des unverdienten Glückes uns erfreuen, die Früchte zu geniefsen von den durch Kaiser Wilhelms unvergleichliche Eigenschaften erkämpften beispiellosen Errungenschaften, werden unsere Ehrenschuld teilweise abzutragen imstande sein, wenn wir das Gelöbnis ablegen und treu erfüllen, dafs wir, jeglicher in seiner Berufssphäre, Ihm nachzueifern trachten, Ihm, der für alle Zeiten bleiben wird ein leuchtendes Vorbild strenger treuer Pflichterfüllung, wahrer christlicher Nächstenliebe und unerschütterlichen, felsenfesten Glaubens an den Lenker aller Dinge!

Eine auf das Hinscheiden Sr. Majestät des hochseligen Kaisers Bezug nehmende Trauerfeier fand vor versammelter Schulgemeinschaft am Beerdigungstage statt.

Bei der Gedächtnisfeier am 22. März knüpfte der Unterzeichnete das einleitende Gebet an Jesaia 55, 6 — 11 an. Der ord. Lehrer, Herr Dr. J. Schneider, entwarf sodann in ebenso beredter wie würdiger Weise ein in grofsen Zügen gehaltenes Gemälde von der segensreichen Regierung des teuren Dahingeschiedenen. Erhebender Gesang schlofs die ernste Feier.

Am Sonntag, den 12. Juni, fand in der altstädtischen Kirche durch Herrn Superintendenten Rosseck die Einsegnung der Konfirmanden statt, am darauf folgenden Mittwoch die gemeinsame Kommunion der Lehrer und Schüler mit den Angehörigen.

Am 7. November wies im Anschluſs an die Morgenandacht der ordentliche Lehrer Dr. Schneider auf die hohe Bedeutung des Reformationsfestes hin.

Am 9. Juni feierte die gesamte Anstalt in Waldfrieden, einem so benannten herrlichen Platze in der Tzullkinner Forst, unter ganz auſsergewöhnlich groſser Beteiligung der Angehörigen von Schülern und Lehrern, sowie zahlreicher Freunde das Schulfest. Das herrliche warme Wetter — ein im Juni v. J. seltener Zufall — die Anwesenheit zahlreicher Eltern sowie die tüchtige Darkehmer Stadtkapelle, die mit wohlgelungenen ernsten und heitern Vorträgen nicht kargte, am Nachmittage auch zum Tänzchen aufspielen muſste, hatten hervorragenden Anteil an der frohen, ungezwungenen Stimmung, die überall wahrzunehmen war. So dürfte das Fest als ein in jeder Beziehung gelungenes angesehen werden und bei allen, die daran teil genommen, die angenehmste Erinnerung hinterlassen haben. Den geehrten Vätern, die so freundlich waren, Fuhrwerke zu stellen, spricht der Unterzeichnete namens der Anstalt an dieser Stelle den ergebensten Dank aus.

Das Schauturnen konnte trotz mehrmaliger Verschiebung des schlechten Wetters wegen nicht stattfinden. Die Verteilung der Preise, zu deren Beschaffung die Patronatsbehörde auch in diesem Jahre 30 Mk. bewilligt hatte, fand am 30. September, nachmittags 3 Uhr, in der Aula statt.

Der Gesundheitszustand des Lehrerkollegiums darf im allgemeinen als günstig bezeichnet werden. Ohne merkliche Störung des Unterrichtsbetriebes wurden im Laufe des Jahres die Lehrer Korell, Puschke, sowie der Unterzeichnete krankheitshalber einige Zeit vertreten. Der Gesundheitszustand der Schüler war gut.

Am 2. Mai starb ein früheres Mitglied des Lehrerkollegiums unserer Anstalt, Herr Realschullehrer Rieder. Nach 45jähriger amtlicher Thätigkeit an hiesiger Anstalt war er am 1. April 1882 in den wohlverdienten Ruhestand getreten. Durch die wahre Liebe zu seinem Berufe sowie durch die Biederkeit seines Charakters erwarb er sich die Liebe und Verehrung seiner Schüler wie die Hochachtung und Freundschaft seiner Mitarbeiter. In den Herzen von Lehrern und Schülern bleibt ihm ein ehrendes Andenken gesichert. Am 6. Mai wurden die irdischen Überreste des wackern Mannes unter Beteiligung der ganzen Anstalt zu Grabe geleitet.

Mit Rücksicht auf die am 19. August, morgens 5¾ Uhr, stattfindende totale Sonnenfinsternis hielt am 17. d. M. vor versammelter Schulgemeinschaft in der Aula Herr Oberlehrer Dr. Müller einen allgemein verständlichen Vortrag über die Bahnen und Gröſse der Gestirne, über die verschiedenen Arten der Sonnenfinsternisse, über die Lage der Erde und des Mondes bei der bevorstehenden Sonnenfinsternis und über die Erscheinungen beim Eintritt der Totalität.

Der Unterricht wurde ausgesetzt: am 5. September nachmittags, 6. September, 9. Dezember, 9. Februar wegen der hier abgehaltenen Pferdemärkte, am 19. August vormittags wegen der Sonnenfinsternis.

Die Revaccination der impfpflichtigen Schüler wurde am 10. September durch den prakt. Arzt Herrn Dr. Gebhard vorgenommen.

Freitag, den 17. Juni, nachmittags und Sonnabend, den 18. Juni, wurde durch den Geheimen Ober-Regierungsrat, vortragenden Rat im Kultusministerium, Herrn Dr. Wehrenpfennig, in Begleitung des Königlichen Provinzial-Schulrates Herrn E. Trosien die Anstalt einer eingehenden Revision unterzogen.

Unter dem Vorsitze des Königlichen Provinzial-Schulrates, Herrn E. Trosien, fand die mündliche Prüfung der Abiturienten für den Ostertermin am 3. März statt. Sämtlichen 8 Examinanden wurde das Zeugnis der Reife für die Prima eines Realgymnasiums zuerkannt. Otto Sperber und Otto Zenthöfer wurden auf Grund ihrer guten schriftlichen Prüfungsarbeiten von der mündlichen Prüfung dispensiert.

IV. Statistische Mitteilungen.

1. Übersicht über die Frequenz und deren Veränderung im Laufe des Schuljahres 1887/88.

	A. Realprogymnasium.								B. Vorschule.			
	IIA	IIB	IIIA	IIIB	IV	V	VI	Sa.	1.	2.	3.	Sa.
1. Bestand am 1. Februar 1887 . .	10	10	17	30	35	53	56	217	36	37	35	108
2. Abgang bis zum Schlufs des Schuljahres 1886/7	10	3	—	—	5	4	—	..	29	—	1	30
3a. Zugang durch Versetzung zu Ostern	8	16	25	24	34	44	29	—	34	33	—	
3b. Zugang durch Aufnahme zu Ostern	—	—	—	3	2	1	4	10	2	2	26	
4. Frequenz am Anfange des Schuljahres 1887/8	8	21	26	32	42	60	45	234	43	38	27	108
5. Zugang im Sommerhalbjahr . . .	—	—	—	—	—	2	1		—	2	1	
6. Abgang im Sommerhalbjahr . . .	—	3	3	3	3	1	2		1	1	1	
7a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
7b. Zugang durch Aufnahme zu Michaelis 1887	—	—	—	—	—	—	—		3		5	
8. Frequenz am Anfang des Winterhalbjahres	9	17	23	29	39	61	44	222	45	39	32	116
9. Zugang im Winterhalbjahr . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	
10. Abgang im Winterhalbjahr . . .	—	1	2	—			1		1			
11. Frequenz am 1. Februar 1888 .	9	16	21	29	39	61	43	218	44	39	33	116
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1888	18	18	16¾	15¼	14	12½	11	—	9½	8½	7¼	

2. Übersicht über die Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	A. Realprogymnasium.							B. Vorschule.						
	Evg.	Kath.	Diss.	Juden.	Einh.	Ausw.	Ausl.	Evg.	Kath.	Diss.	Juden.	Einh.	Ausw.	Ausl.
1. Am Anfange des Sommersemesters	229	0	0	5	152	82	0	104	0	0	4	81	17	0
2. Am Anfange des Wintersemesters	218	0	0	4	147	75	0	111	1	0	4	96	20	0
3. Am 1. Februar 1888	214	0	0	4	146	72	0	111	1	0	4	96	20	0

Das Zeugnis für den einjährigen Militairdienst haben erhalten Ostern 1887: Otto Sperber, Otto Zenthöfer, Karl Werwath, Richard Uschkurath, Walter Tempelhoff, Paul Schikowsky, Richard Nickel, Emil Lottermoser, Otto Didrigkeit, Ernst Meyer, Leopold Huck. Michaelis 1887: Paul Eckert, Friedrich Keil, Ernst Ladwig, Ernst Ehlert, Eduard Büttler. Davon sind zu einem praktischen Beruf abgegangen Ostern 3, Michaelis 4.

Das Zeugnis der Reife für die Prima eines Realgymnasiums erhielten:

Zu Ostern 1888.

Nro.	Vor- und Zuname.	Datum der Geburt.	Ort der Geburt.	Konfession.	Stand und Wohnort des Vaters.	Dauer des Aufenthalts auf der Schule überhaupt (Jahre)	in der Sekunda	in Ober-Sekunda	Erwählter Beruf.
1	2	3	4	5	6	7			8
1	Otto Didrigkeit	2. Aug. 1869	Gumbinnen	ev.	Händler in Gumbinnen	9	3	1	Kaufmänn. Beruf.
2	Emil Lottermoser	1. Juni 1869	Gumbinnen	ev.	Beamter an d. Königlichen Ostbahn	9	3	1	Eisenbahndienst.
3	Richard Nickel	1. Mai 1870	Rhein	ev.	Postwagenmeister in Gumbinnen	9	2	1	Reichspostdienst.
4	Otto Sperber	8. Juni 1872	Gumbinnen	ev.	Stadtsekretär in Gumbinnen	7	2	1	Prima eines Real-Gymnasiums.
5	Walter Tempelhoff	1. Febr. 1868	Danzig	ev.	Regierungssekretär in Gumbinnen	2	2	1	Feldmesser-Carriere.
6	Richard Uschkurath	10. Mai 1869	Gumbinnen	ev.	Tischlermeister	8	2	1	Reichspostdienst.
7	Karl Werwath	25. Sept. 1871	Stallupönen	ev.	Kaufmann in Stallupönen	4	2	1	Kaufmänn. Beruf.
8	Otto Zenthöfer	13. Febr. 1871	Stallupönen	ev.	Grundbesitzer in Stallupönen	4	2	1	Landwirtschaft.

Die Einnahme an Schulgeld betrug im verlaufenen Schuljahre

im Sommersemester:			im Wintersemester:		
April	1606	Mark,	Oktober	1526	Mark,
Mai	1585	„	November	1553	„
Juni	1565	„	Dezember	1521	„
Juli	1607	„	Januar	1510	„
August	1579	„	Februar	1540	„
September	1587	„	März	1510	„
in Summa	9529	Mark	in Summa	9160	Mark
			Gesamtsumme	18689	Mark.

1194 Mark Mehreinnahme als im Vorjahre.

V. Sammlungen von Lehrmitteln.

A. Lehrerbibliothek.

1) Von wissenschaftlichen Zeitschriften wurden gehalten:

Centralblatt für die gesamte Unterrichts-Verwaltung in Preufsen. Dr. M. Strack, Centralorgan für die Interessen des Realschulwesens. Hoffmann, Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Dr. Euler und Eckler, Monatschrift für das Turn-

wesen. R. Reicke und E. Wichert, Altpreufsische Monatschrift. Dr. E. Kleyer, vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung. Körting und Koschwitz, Zeitschrift für die neufranzösische Sprache und Litteratur. Vom Fels zum Meer, 1886.

2) Aus dem Fonds der Bibliothek wurden aufserdem angeschafft:
Frick und Polack, Aus deutschen Lesebüchern, Band IV, Heft 13—15. — Nesemann-Wolter, 80 Bibelabschnitte — Schmidt, Kaiser Wilhelm-Anekdoten. — Scherr, Blücher, Band I—X. — Marryat, The children of the new forest. — Choix de poésier. — Zuck, Kurzer Abrifs der Kirchengeschichte. — Riemann, Fest- und Feierstunden in der Schule. — Thiemann, Genealogie europäischer Regenten. — Zeichenhalle pro 1886 und 1887. — Antibarbarus ed. Krebs, Band I. — Haester-Böhm, Rechenbuch, Heft I—VI und Antworten, Heft I—VI. — Mushacke, Statistisches Jahrbuch der höheren Schulen. VIII. 1. — Herder, Sämtliche Werke, Band XIII—XIV. — Meyer, Aufsatzregeln. — Mehler, Elementar-Mathematik — Boyle, William I. — Elvenspoeck u. Müller, Schulwandkarte von Ostpreufsen — Köppen, Hohenzollern L. 45—61. — Huth, Mitteilungen aus dem Gesamtgebiete der Naturwissenschaften. Karte von Australien. — Breymann, Die Lehre v. franz. Verb. — Havet, le français enseigné. — Jäger, Geschichte der Römer.

B. Schülerlesebibliothek.

Tit. I. (Sekunda und Tertia.) Gindely: Geschichte des dreifsigjährigen Krieges. Lippert: Culturgeschichte. K. E. Jung: Der Weltteil Australien. Jul. Jung: Das Leben und die Sitten der Römer. Willkomm: Die pyrenäische Halbinsel. Wafsmuth: Elektrizität. (doppelt.) Falkenstein: Afrikas Westküste. Fritzsch: Südafrika. Meyer v. Waldeck: Rufsland. Klaar: Gesch. des mod. Dramas. Valentiner: Kometen u. Meteore. Klein: Allgem. Witterungskunde. E. Wichert: Der grofse Kurfürst in Preufsen. C. Falkenhorst: Der Zauberer von Kilima-ndjaro. Hentschel u. Märkel: Umschau in Heimat und Fremde. Europa.

Tit. II. Quarta. B. Garlepp: Aus Blüchers jungen Jahren. Aus Wrangels jungen Jahren. F. Heyer: Kaiser Konrad II. Kaiser Heinrich III. G. Wunschmann: Hans Birkenstock, der Landsknecht.

An Geschenken wurden der Anstalt zugewendet von dem Kgl. Provinzial-Schul-Kollegium:
für Tit. I. Göll: Göttersagen u. Cultusformen. Stoll: Die Helden Roms. F. Otto: Deutsche Dichter- und Wissensfürsten. Männer eigner Kraft.

vom Quartaner Schinz:
für Tit. II. Ferry: Der Waldläufer.

Tit. III. (Quinta u. Sexta.) Neumann-Strela: Kaiser Wilhelm. A. Richter: Götter und Helden. Lausch: Heitere Ferientage. Pilz: Die kleinen Tierfreunde. Offterdinger: Märchenschatz. Fdd. Schmidt: Reincke Fuchs. Seifart: Don Quichotte. F. Werner: Aus 1001 Nacht. G. Höcker: Steuermann Ready. Plieninger: Aus Weifses Kinderfreund. Meifsner: Christrosen. J. Hoffmann: Der schwarze Sam. v. Horn: Feldmarschall Blücher. Baron: Die Überschwemmung, Kalifornien in der Heimat. Fz. Kühn: Gott verläfst keinen Deutschen, Die Brüder, Treue Freundschaft. R. Roth: Recht besteht, Unrecht vergeht, Der Tigerjäger, Der Tolpatsch, Er führet es herrlich hinaus, Stanleys Reise.

Vom Quintaner Schilcke:
für Tit. III. Chr. Schmid: Das Lämmchen.

Durch das Königl. Provinzial-Schulkollegium wurden der Anstalt zugewiesen: Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 2 Bde. Leng, Jahrbuch der Erfindungen, 5 Bde. Förster, Friedrich der Grofse. Wielands Werke 15 Bde. Gaudy, Anthologie aus dessen Werken. Töpffer, Rosa und Gertrud. Borchardt, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78—Bd. 93. Schmidt, Schiller und seine Zeitgenossen.

C. Für die bibliotheca pauperum wurden der Anstalt an Geschenken zugewendet:
Von der G. Grote'schen Verlagsbuchhandlung: Hopf u. Paulsiek, für VIII 2 Exempl., für VII 2 Exempl., für VI 2 Exempl., für V 2 Exempl., für IV 2 Exempl.

Von der Verlagsbuchhandlung von E. S. Mittler u. Sohn in Berlin: Hopf u. Paulsiek für III 3 Exempl., für II u. I Teil II Abschnitt I 3 Exempl., für II u. I Teil II Abschnitt II 3 Exempl.

Von der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in Leipzig: Ostermann, Lat. Übungsbuch für VI 4 Exempl., für V 4 Exempl., für IV 4 Exempl., für III 4 Exempl.; Lat. Vokabul. für VI 4 Exempl., für V 4 Exempl., für IV 4 Exempl., für III 4 Exempl.; Ostermann, Lat.-Dtsch. u. Dtsch-Lat. Wörterbuch für VI, V, IV, 4 Exempl.; Nepos-Vocabular, ed. Ernst Schäfer, 3 Teile.

Von der Buchhandlung F. A. Herbig in Berlin; Ploetz, Elementarbuch der franz. Sprache, 4 Exempl.; Schulgrammatik der franz. Sprache, 4 Exempl.; Franz. Chrestomathie, 4 Exempl; Vocabulaire Français, 4 Exempl.

Von der Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin: Sonnenburg, Grammatik der englischen Sprache, 3 Exempl.; Englisches Übungsbuch Abteilung I, 3 Exempl., Abteilung II 3 Exempl.

Von der Buchhandlung von Adolf Gestewitz in Frankfurt a./M.: Boyle, George William I, 2 Exempl.

Von der Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer in Berlin: Dr. F. G. Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik, 8 Exempl.

Von dem Abiturienten Brackmann: Montesquieu, Caesar, Bardey, Aufgabensammlung, Ciceros Cat. Reden, Herbst, alte Geschichte.

Von dem Abiturienten Brofzat: Goldsmith, Engl. Lesebuch. Preufs. Bibl. Gesch. Ploetz, Lectures choisies. Schilling, Naturgeschichte. Noack, Religionsbuch. Schilling, Naturgeschichte.

Von dem Abiturienten Maruhn: Daniel, Geographie. Ovid, Metamorph. Ostermann, für III. Noack, Religionsbuch. Bardey, Aufgabensammlung.

Von dem Sekundaner Huck: Bardey, Aufgabensammlung. Lamb. Tales fronn Shakespeare. Tales of a Grandfather, by Scott. Cicero Catilin Reden. — Le malade imaginaire, par Molière. Le verre d'eau par Scribe. — L'avare, par Molière. — Montesquieu. — Ovid. Metamorph.

Von dem Sekundaner Ernst Meyer: George's Wörterbuch, deutsch—lateinisch 2 Bde. Mühlmann, deutsch-lat., lat.-deutsch 2 Bde. Caesar, de bello Gallico. Weller, Lat. Lesebuch. Cicero. Catilin. Reden. Lexikon für Caesar von Eichert. Herbst, alte, neue und Geschichte des Mittelalters. Schilling, Naturgeschichte des Mineralreiches. Ohlert, Lehrbuch der Geometrie. Ostermann, für V.

Von dem Sekundanr Ernst Ladwig: Ovid Metamorph. Cicero. Catilin. Reden. Caesar, Lexikon. Ostermann, für III. Plötz, Chrestomathie. Montesquieu. Considérations. Bardey, Aufgabensammlung. Ohlert, Planimetrie. Schilling, Tierreich.

Von dem Sekundaner Ehlert: Uhlands Gedichte. Noack, Religionsbuch. Cicero, Catilin. Reden pro Archia. Montesquieu Considérations. Plötz, Schulgram. Goldsmith, Vicar of Wakefield u. Wörterverzeichnis. Herbst, Alte Geschichte. Eckertz Deutsche Geschichte. Daniel, Geographie. Scribe, Bertrand et Raton. Kiepert, Karte von Griechenland Gauss, Logarithmen. Schilling, Tierreich.

Für das physikalisch-chemikalische Kabinett wurde angeschafft: Eine Dynamitmaschine, mehrere Glasgefäfse und ausgestopfte Tiere: eine Wanderratte, ein Maulwurf, ein Reiher, eine Waldohreule, ein Eisvogel, ein Ziegenmelker, eine Rotdrossel, ein Paar Gimpel.

Von dem Königlichen Provinzial-Schulkollegium wurden der Anstalt überwiesen: Ein Dickenmesser, eine Glocke, eine Sonnenuhr, eine Boussole, ein Spiegelteleskop, 4 Serpentin-Reibschalen, 2 Kühlröhren nach Liebig, ein grofser Gasometer.

Von sonstigen Geschenken gingen ein von dem früheren Schüler der Anstalt Fritz Maruhn eine Sammlung von Insekten.

Aus freiwilligen Beiträgen der Klassen VI—II in sa. M. 23,28 und aus einem Zuschufs aus dem Privatschulschatz von M. 21,2 wurden eine schöne Schulfahne schwarz-weifs mit Adler u. Inschrift, 1 Tragriemen, 1 Schärpe schwarz-weifs und 2 Schärpen schwarz-weifs-rot beschafft.

Allen freundlichen Gebern spricht der Unterzeichnete für die der Anstalt zugewendeten Geschenke den besten Dank aus.

VI.

Die von Meelbeck'sche Freistelle war in dem verflossenen Schuljahre unbesetzt geblieben.

VII. An die Eltern unserer Schüler.

An dieser Stelle wiederhole ich, was in den früheren Programmen so nachdrücklich immer betont worden ist, dafs es Pflicht der Eltern und deren Stellvertreter ist, auf den regelmäfsigen häuslichen Fleifs und eine verständige Zeiteinteilung ihrer Kinder selbst zu halten. Ausdrücklich werden die Eltern oder deren Stellvertreter gebeten, in allen Fällen, wo das zulässige und zuträgliche Mafs der häuslichen Aufgaben überschritten zu sein scheint, dem Rektor oder dem Ordinarius der Klasse vertrauensvoll persönlich oder brieflich Mitteilung zu machen. Anonyme Mitteilungen können keine Berücksichtigung finden, offene unumwundene Mitteilungen wird die Schule jederzeit mit aufrichtigem Danke entgegennehmen. Überhaupt kann das leibliche wie das geistige Wohl der uns anvertrauten Schüler nur dann erfolgreiche Förderung erfahren, wenn die Schule sich ebenso sehr der treuen, nachdrücklichen Unterstützung, wie des unbedingten vollen Vertrauens des Elternhauses versichert halten darf.

Ebenso bitte ich die geehrten Angehörigen unserer Schüler, die für unsere Anstalt geltende und von der hohen Behörde genehmigte Schulordnung einer geneigten Lektüre zu unterziehen. Die Beachtung derselben wird den Verkehr zwischen Schule und Elternhaus in einer für beide Teile erwünschten Weise erleichtern. An folgende §§. sei an dieser Stelle besonders erinnert:

§. 2. Die Eltern und deren Stellvertreter verpflichten sich, indem sie ihre Söhne und Pflegebefohlenen der Anstalt übergeben, auch ihrerseits zur Aufrechterhaltung der Schulordnung mitzuwirken.

§. 5. Wird ein Schüler durch Krankheit am Besuche der Schule gehindert, so mufs dies dem Ordinarius sobald als möglich, spätestens am Morgen des zweiten Tages, angezeigt und beim Wiederbesuch der Schule eine Bescheinigung des Vaters oder dessen Stellvertreters über die Dauer der Krankheit und, falls der Rektor es verlangt, auch ein ärztliches Attest beigebracht werden. — Hat ein Schüler eine ansteckende Krankheit überstanden, oder ist jemand in seiner häuslichen Umgebung davon befallen, so hat er eine ärztliche Bescheinigung darüber beizubringen, dafs sein Schulbesuch die anderen Schüler nicht gefährdet. — Erkrankt ein Schüler während der Ferien, so dafs er beim Wiederbeginn des Unterrichts die Schule nicht besuchen kann, so ist dies dem Rektor oder dem Ordinarius gleich am ersten Schultage anzuzeigen.

§. 12. Die Schulzeugnisse (und Sittenhefte) bringt jeder Schüler am nächsten Schultage nach der Aushändigung, von seinem Vater oder dessen Stellvertreter unterschrieben, zurück, ingleichen aufserordentliche Mitteilungen an dieselben, sofern Unterschrift ausdrücklich verlangt wird. — Etwaige Bemerkungen, zu denen der Inhalt Anlafs giebt, dürfen, falls nicht mündliche Rücksprache vorgezogen wird, nur in verschlossenem Schreiben beigefügt werden.

§. 20. Soll ein Schüler die Anstalt verlassen, so mufs dies der Vater oder der Vormund dem Rektor mündlich oder schriftlich anzeigen. Wird der Abgang nicht vor Beginn des neuen Monats angezeigt, so ist für diesen das ganze Schulgeld zu zahlen.

Schriftliche Anmeldungen vor der Aufnahmeprüfung sind erwünscht, und solche entgegenzunehmen, ist der Unterzeichnete gern bereit; ebenso weist derselbe passende Pensionen in guten Familien nach.

Mittwoch, den 28. März, 8 Uhr Zeugnisverteilung und Schlufs des Schuljahres.

A. Jacobi, Rektor.

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Montag den 26. März, vormittags von 8 Uhr ab.

Gebet des Rektors.

8 Uhr. **Oktava:** Religion. Rechnen. } Herr Klein.
8 Uhr 50 Min. **Septima:** Deutsch. Herr Puschke.
9 Uhr 20 Min. **Nona:** Rechnen: Herr Klein.
9 Uhr 40 Min. Deutsch: Herr Puschke.
IX. Kurt Schultz: „Drescherlied" von Rud. Löwenstein.
Kurt Link: „Der Himmel" von Rud. Löwenstein.
VIII. Robert Grundmann: „Die Zwerge auf dem Baume" von Aug. Kopisch.
Otto Roland: „Das Mäuslein" von Fried. Güll.
VII. Fritz Kuster: „Der junge Matrose" von Rud. Löwenstein.
Erich Granaſs: „Der grüne Esel" von Gellert.
10 Uhr 5 Min. **Sexta:** Deutsch. Herr Korell.
10 Uhr 30 Min. Latein. Herr de la Chaux.
Karl Pillekat: „Rudolf von Habsburg."
Bruno Schwaiger: „Der Bauer und sein Sohn" von Chr. Fürchteg. Gellert.
11 Uhr 5 Min. **Quinta:** Religion. Herr Korell.
11 Uhr 30 Min. Rechnen. Herr Powel.
Otto Funck: „Graf Richard ohne Furcht" von Ludw. Uhland.
Albert Weikusat II: „Der Choral von Leuthen" von Hermann Besser.

Schluſsgesang.

Nachmittags.

3 Uhr. **Quarta:** Latein. Herr Oberlehrer Dr. Müller.
3 Uhr 30 Min. Französisch. Herr Thöne.
Otto Wieser: „Der Schutzgeist" von Th. Südow.
Oskar Schreiner: „Unsere Salzburger" von Ernst Wiechert.

Schluſsgesang.

Dienstag den 27. März, vormittags von 8 Uhr ab.

Gebet des Herrn Dr. Schneider.

8 Uhr. **Tertia B:** **Tertia A:** } Religion. Herr Dr. Schneider.
8 Uhr 30 Min. **Tertia B:** Englisch. Herr Capeller.
9 Uhr. Geographie. Herr Thöne.
Max Albrecht: „Der Kaiser und der Abt" von Bürger.
Engl. Bruno Werwath: „Twilight" von Longfellow.
9 Uhr 30. Min. **Tertia A:** Deutsch. Herr Dr. Schneider.
10 Uhr. Latein. Der Rektor.
Fritz Gesenger: „Die drei Indianer" von Lenau.
Franz. Hermann Rauch: „Le voyageur égaré dans les neiges du Saint-Bernard" von Chêne dollé.
10 Uhr 30 Min. **Sekunda:** Mathematik. Herr Powel.
11 Uhr. Französisch. Herr Capeller.
11 Uhr 30 Min. Physik. Herr Oberlehrer Dr. Müller.
Franz. Bernhard Warstat: „Souvenirs d'enfant" von Fr. Béchard.
Engl. Fritz Storbeck: „My mother's bible" von Morris.

Entlassung der Abiturienten durch den Rektor.

Gesänge. Zur öffentlichen Prüfung:

1. Motette: Hoch thut euch auf etc. v. *Gluck*. 2. Nun bricht aus allen Zweigen v. *Billeter*. 3. Motette: Frohlocket, ihr Völker, v. *Möhring*. 4. Zu Straſsburg auf der Schanz, *Fr. Silcher*. 5. Schwertlied: Du Schwert an meiner etc. *K. M. v. Weber*. 6. Marschlied: Frisch voran, *Abt*.

Zur Entlassung der Abiturienten:

1. Nun ertönt die Abschiedsweise, *Isenmann*. 2. Lebet wohl! ihr trauten Brüder, *A. P. Schulz*.